Acad. **Nicolae Teodorescu**
Prof. dr. **Valter Olariu**

Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale

Volumul II

Ecuaţii cu derivate parţiale

Editura tehnică
Bucureşti — 1979

Volumul II continuă prezentarea, începută în volumul I, a teoriei ecuaţiilor diferenţiale şi cu derivate parţiale; sînt tratate probleme referitoare la teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întîi, cîteva aspecte esenţiale din calculul variaţiilor şi este început studiul sistematic al ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordin superior, iar ultimul capitol conţine o introducere în teoria derivatei areolare, o creaţie în esenţă românească. O parte a acestei problematici va fi continuată în volumul III.

Lucrarea se adresează inginerilor, matematicienilor, fizicienilor, studenţilor, tuturor acelora care în activitatea lor studiază şi aplică teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale.

Redactor: **Valentina Creţu**
Tehnoredactor: **Elena Geru**
Coperta: **Theodora Doxan**

Bun de tipar: 07. 11. 1979. Coli de tipar: 23,25.
Tiraj: 6 900 + 85 exemplare legate. C.Z. 517.9

C. 14 — I. P. „INFORMAŢIA"
Str. Brezoianu Nr. 23 — 25
BUCUREŞTI

Cuprins

1. Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi 7

1.1. Sisteme diferenţiale autonome 7
1.2. Spaţiul fazelor. Traiectorii 13
1.3. Ecuaţii cu derivate parţiale liniare de ordinul întîi 14
1.4. Teoria geometrică a ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întîi 34
1.5. Ecuaţia neliniară cu derivate parţiale de ordinul întîi şi cu două variabile independente 39
1.6. Ecuaţia generală neliniară cu derivate parţiale de ordinul întîi 55
Exerciţii 60

2. Ecuaţia lui Bellman şi ecuaţia Hamilton-Jacobi 61

2.1. Problema controlului 61
2.2. Principiul maximului şi calculul variaţiilor 79
2.3. Ecuaţia Hamilton-Jacobi 97
Exerciţii 117

3. Calculul variaţiilor 120

3.1. Introducere 120
3.2. Condiţii necesare de extrem 121
3.3. Lemele fundamentale ale calculului variaţiilor 127
3.4. Ecuaţia Euler-Ostrogradski 129
3.5. Ecuaţia lui Euler 146
3.6. Sistemul Euler-Lagrange 155
3.7. Variaţia sincronă şi variaţia asincronă 157
3.8. Probleme variaţionale cu condiţii suplimentare 166
3.9. Probleme variaţionale cu frontieră variabilă 180
3.10 Calculul variaţiilor şi distanţa geodezică 188
3.11. Metode directe în calculul variaţional 190
Exerciţii 204

4. Funcţii şi valori proprii pentru operatori diferenţiali 207

4.1. Generalităţi 207
4.2. Probleme la limită pentru operatori diferenţiali 225
4.3. Metoda separării variabilelor 230
4.4. Serii trigonometrice şi aplicaţii 238

4. 5. Seriile trigonometrice şi integrarea ecuaţiilor 259
4. 6. Funcţiile proprii şi teoria polinoamelor ortonormale 281
4. 7. Funcţiile Bessel ca funcţii proprii 296
4. 8. Existenţa funcţiilor şi valorilor proprii pentru operatori diferenţiali . . . 299
4. 9. Probleme la limită Sturm-Liouville 313
4.10. Probleme la limită pentru ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n 327
4.11. Funcţii şi valori proprii pentru operatorul lui Laplace 334
4.12. Problemele la limită şi calculul variaţiilor 338

5 Derivata areolară şi aplicaţii 341

5. 1. Condiţiile Cauchy-Riemann 341
5. 2. Operatorii diferenţiali ∂_z şi $\overline{\partial}$ 347
5. 3. Operatorul $\overline{\partial}$ şi integrarea unor sisteme de ecuaţii 354
5. 4. Derivata areolară 357
Bibliografie 372

CAPITOLUL 1

Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi

1.1. Sisteme diferenţiale autonome

Un sistem diferenţial de forma

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1}$$

în care $\dot{x}_j = \dfrac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, se numeşte *sistem diferenţial autonom* (de ordinul întîi) scris sub forma normală; cu alte cuvinte, caracteristic pentru un sistem diferenţial autonom este faptul că funcţiile f_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, nu depind (explicit) de variabila independentă t. Funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se presupun reale şi definite într-un domeniu (înţelegînd prin domeniu o mulţime deschisă şi conexă) D_n din spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$ şi astfel încît condiţiile teoremei de existenţă şi unicitate pentru problema Cauchy să fie verificate în D_n; pentru aceasta, este suficient să se presupună $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funcţii de clasă C^1 în D_n.

Astfel, dacă $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in D_n$, sistemul (2.1) va admite o singură soluţie

$$x_j = \varphi_j(t), \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

care verifică datele iniţiale

$$\varphi_j(t_0) = \xi_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.3}$$

soluţia (1.2) fiind definită pentru $t \in]a, b[$, $a < t_0 < b$; se va presupune că intervalul $]a, b[$ este intervalul maxim de definiţie al soluţiei (1.2).

Utilizînd notaţiile vectoriale $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, sistemul autonom (1.1) se va scrie sub forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x) \tag{1.1'}$$

iar soluţia (1.2) se transcrie

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t). \tag{1.2'}$$

Această soluţie va fi astfel încît

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\xi}. \tag{1.3'}$$

Numărul real t_0 care apare în (1.3') este evident valoarea iniţială a variabilei independente (dacă t are semnificaţie de timp; se obişnuieşte să se presupună $t_0 = 0$), iar în baza teoremelor de dependenţă a soluţiilor sistemelor diferenţiale de condiţiile iniţiale, soluţia (1.2) se poate scrie şi sub forma

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t;\, t_0, \boldsymbol{\xi}). \tag{1.2''}$$

Vom avea, evident, $\boldsymbol{\varphi}(t_0;\, t_0, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$.

Din punct de vedere geometric, sistemul autonom (1.1) defineşte în fiecare punct $\mathbf{x}^0$ al domeniului n numere reale

$$f_1(\mathbf{x}^0) = f_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \ldots, f_n(\mathbf{x}^0) = f_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

care pot fi considerate componentele unui vector $\mathbf{f}$ din $\mathbb{R}^n$ (avînd originea în $\mathbf{x}^0$); deoarece $\mathbf{x}^0$ este arbitrar în D_n, sistemul diferenţial autonom (1.1) defineşte în D_n un cîmp de vectori $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D_n$.

Soluţia (1.2) poate fi interpretată ca o curbă γ în D_n, tangenta la γ fiind definită în orice punct; această tangentă avînd parametrii directori $\dot{\varphi}_1(t^0), \ldots, \dot{\varphi}_n(t^0)$ în punctul $\mathbf{x}^0 = \boldsymbol{\varphi}(t^0)$, în baza sistemului (1.1), rezultă că vectorii $\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t^0)$ şi $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ sînt liniar dependenţi. Cu alte cuvinte, o curbă integrală γ a sistemului autonom (1.1) este tangentă în fiecare punct la vectorul $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$; din acest motiv, curbele integrale ale sistemului (1.1) se numesc şi *linii de cîmp* (sau *linii vectoriale*) ale cîmpului vectorial $\mathbf{f}$ definit cu ajutorul sistemului autonom (2.1).

Un sistem de ecuaţii diferenţiale neautonom, scris sub forma normală, va fi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \quad t),\ \dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t},$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$; introducînd notaţia $t = x_{n+1}$, deoarece $\dfrac{\mathrm{d}x_{n+1}}{\mathrm{d}t} = 1$, se deduce că dacă se adaugă acestui sistem o nouă ecuaţie, $\dot{x}_{n+1} = 1$, se va obţine, evident, un sistem autonom

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{f}'(\mathbf{x}'),$$

unde $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$, $\mathbf{f}' = (f_1, f_2, \ldots, f_n, 1)$. Aşadar, introducînd o nouă funcţie necunoscută (punînd $x_{n+1} = t$), un sistem neautonom cu n ecuaţii diferenţiale se transformă într-un sistem autonom, avînd însă $n + 1$ ecuaţii diferenţiale; cu alte cuvinte, studiul sistemelor diferenţiale autonome reprezintă studiul cazului general al sistemelor diferenţiale.

Vom stabili unele proprietăţi ale sistemelor autonome.

Teorema 1.1. *Dacă $x_j = \varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, este o soluţie a sistemului autonom* (1.1), *atunci*:

1) *funcţiile $\psi_j(t) = \varphi_j(t + \alpha)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sînt de asemenea soluţii ale aceluiaşi sistem autonom pentru $t \in]\, a - \alpha,\ b - \alpha[$;*

2) *dacă soluţiile $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ şi $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(t)$ ale sistemului* (1.1') *au un punct comun, adică $\boldsymbol{\varphi}(t_1) = \boldsymbol{\psi}(t_2)$, $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in]a, b[$, atunci $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t + \alpha)$, $\alpha = t_1 - t_2$;*

3) *soluţia $\boldsymbol{\varphi}(t;\, \boldsymbol{\xi})$ a problemei Cauchy $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\xi}$ pentru sistemul* (1.1') *verifică egalitatea de semigrup*

$$\boldsymbol{\varphi}[t;\, \boldsymbol{\varphi}(s;\, \boldsymbol{\xi})] = \boldsymbol{\varphi}(t + s;\, \boldsymbol{\xi})$$

pentru orice s fixat din $]a, b[$.

⌈ 1. În baza regulii de derivare a funcţiilor compuse, se obţine

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\varphi}(t + \alpha) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(t + \alpha)}\boldsymbol{\varphi}\,(t + \alpha)\frac{\mathrm{d}(t + \alpha)}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t + \alpha);$$

înlocuind în (1.1′) t cu $t+\alpha$, se deduce (scriind $\boldsymbol{\varphi}$ în loc de $\mathbf{x}$):

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t+\alpha) = \mathbf{f}[\boldsymbol{\varphi}(t+\alpha)],$$

adică $\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\psi})$; deoarece $t \in]a, b[$, notînd $t' = t+\alpha$, va trebui să fie $a < t' < b$, deci $a < t+\alpha < b$, adică soluția $\boldsymbol{\psi}(t)$ va avea intervalul maxim de definiție pentru $t \in]a-\alpha, b-\alpha[$.

2. Dacă soluțiile $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ și $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(t)$ ale sistemului autonom (1.1′) au un punct comun, atunci, în baza teoremei de unicitate, aceste soluții vor coincide; așadar, din egalitatea $\boldsymbol{\varphi}(t_1) = \boldsymbol{\psi}(t_2)$, $t_1 \neq t_2$, se deduce în mod obligatoriu egalitatea

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t+\alpha),\ \alpha = t_1 - t_2.$$

3. Punînd $\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(s;\boldsymbol{\xi})$, pentru $s \in]a, b[$ fixat, rezultă $\mathbf{y} \in D_n$ iar soluția problemei Cauchy $\mathbf{x(0)} = \mathbf{y}$ pentru sistemul (1.1′) va fi $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t;\mathbf{y})$, adică $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}[t;\boldsymbol{\varphi}(s;\boldsymbol{\xi})]$; cum soluțiile $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})$ și $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\varphi}(s,\boldsymbol{\xi})]$ au un punct comun $\mathbf{y} \in D_n$, în baza punctului 2 al teoremei, rezultă concluzia dorită, deoarece aici $t_1 = s$, $t_2 = 0$, adică $\alpha = s$. ┘

O funcție $u = u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de clasă C^1 în D_n se numește *integrală primă* a sistemului autonom (1.1), dacă prin înlocuirea lui $\mathbf{x}$ cu orice soluție $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ a acestui sistem, funcția

$$u[\boldsymbol{\varphi}(t)] = u[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)]$$

nu depinde de t; cu alte cuvinte, funcția compusă $u[\boldsymbol{\varphi}(t)]$ este o constantă (această constantă depinde de soluția $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ aleasă: modificîndu-se soluția, se modifică și această constantă).

Exemplul 1. Fie sistemul autonom liniar ($n = 2$)

$$\dot{x}_1 = x_2,\quad \dot{x}_2 = x_1;$$

o integrală primă va fi funcția $u(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$.

Într-adevăr, orice soluție $\mathbf{x} = (\varphi_1, \varphi_2)$ a sistemului considerat se va obține dînd valori constantelor c_1 și c_2 din egalitățile

$$x_1(t) = c_1 \exp(t) + c_2 \exp(-t),\qquad x_2(t) = c_1 \exp(t) - c_2 \exp(-t),$$

și calculînd $x_1^2(t) - x_2^2(t)$ se obține $4c_1c_2$; rezultă evident că această valoare se modifică, dacă se modifică soluția $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. De asemenea, prin calcul, se deduce că și funcția $u_1(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2x_2^2$ este o integrală a aceluiași sistem.

Un sistem diferențial dat poate admite oricîte integrale prime; astfel, dacă $u_1, u_2, \ldots, u_k$ sînt k integrale prime pentru sistemul (1.1), atunci și funcția $U = U(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, unde U este o funcție oarecare (de clasă C^1) de k variabile, va fi o integrală primă a aceluiași sistem diferențial; într-adevăr, dacă $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ este o soluție oarecare pentru sistemul (1.1), funcțiile $u_1[\boldsymbol{\varphi}(t)], u_2[\boldsymbol{\varphi}(t)], \ldots, u_k[\boldsymbol{\varphi}(t)]$ nu vor depinde de t, ceea ce înseamnă că nici funcția $U[\boldsymbol{\varphi}(t)]$ definită prin

$$U[\boldsymbol{\varphi}(t)] = U(u_1[\boldsymbol{\varphi}(t)], u_2[\boldsymbol{\varphi}(t)], \ldots, u_k[\boldsymbol{\varphi}(t)])$$

nu va depinde de t.

Fie $\mathbf{a} \in D_n$, astfel încît $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$; aceasta înseamnă că există cel puțin un indice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încît $f_j(\mathbf{a}) = f_j(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$. Integralele prime $u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), \ldots, u_k(\mathbf{x})$ ale sistemului diferențial (1.1) se numesc *independente în punctul* $\mathbf{a}$, dacă matricea jacobiană $\left[\dfrac{\partial u_j}{\partial x_m}\right]$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $m = 1, 2, \ldots, n$, are rangul k. În caz contrar, integralele prime în cauză sînt dependente.

Teorema 1.2. *În vecinătatea oricărui punct* $\mathbf{a} \in D_n$, *astfel încît* $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, *există* $n-1$ *integrale prime independente ale sistemului diferențial autonom* (1.1).

┌ Deoarece $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, se poate presupune $f_n(\mathbf{a}) \neq 0$ și dacă $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, să rezolvăm problema Cauchy

$$\mathbf{x(0)} = \boldsymbol{\xi},\quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, a_n)$$

pentru sistemul diferențial (1.1), presupunînd punctul $\boldsymbol{\xi} \in D_n$ suficient de apropiat de punctul $\mathbf{a}$; se obține soluția $\mathbf{x} = \varphi(t;\xi)$, adică pe componente această soluție se va scrie

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, a_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n &= \varphi_n(t;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, a_n). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Înlocuind $t = 0$, se obține sistemul de egalități

$$\begin{aligned} \varphi_1(0;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, a_n) &= \xi_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_{n-1}(0;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, a_n) &= \xi_{n-1},\\ \varphi_n(0;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, a_n) &= a_n, \end{aligned} \tag{1.4′}$$

care va fi verificat dacă $\xi_1 = a_1, \ldots, \xi_{n-1} = a_{n-1}$; interpretînd (1.4) ca un sistem format din n ecuaţii cu necunoscutele $t, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, deoarece determinantul funcţional $\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(t, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})}$ pentru $t = 0$ devine egal cu $(-1)^{n-1}\dot{\varphi}_n(\mathbf{0}) = (-1)^{n-1} f_n(\mathbf{a}) \neq 0$ $\left[\text{utilizînd (1.4'), rezultă } \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi_m} = \delta_{jm},\ j = 1, \ldots, n,\ m = 1, \ldots, n-1\right]$, acest jacobian va fi diferit de zero într-o vecinătate $V_{\mathbf{a}}$ a punctului $\mathbf{a}$ şi conform cu teorema funcţiilor implicite, va rezulta

$$t = t(\mathbf{x}),\ \xi_1 = u_1(\mathbf{x}), \ldots, \xi_{n-1} = u_{n-1}(\mathbf{x}). \tag{1.4''}$$

Să arătăm că funcţiile $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ astfel găsite sînt $n-1$ integrale prime pentru sistemul diferenţial (1.1), independente în punctul $\mathbf{a}$. Or, deoarece funcţiile $u_1, \ldots, u_{n-1}$ se obţin prin rezolvarea sistemului (1.4) în raport cu $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, înlocuind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cu partea dreaptă din (1.4), vom avea $u_j[\boldsymbol{\varphi}(t; \boldsymbol{\xi})] = \xi_j$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, adică, pentru soluţiile (1.4) ale sistemului diferenţial (1.1), funcţiile $u_1, \ldots, u_{n-1}$ nu depind de t. Dacă $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(t)$ este o altă soluţie din $V_{\mathbf{a}}$ a sistemului diferenţial (1.1), astfel încît $\boldsymbol{\psi}(t_0) = \mathbf{x}^0$, deoarece sistemul (1.4) este inversabil pentru orice $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \in V_{\mathbf{a}}$, va exista vectorul $\bar{\boldsymbol{\xi}}$, astfel încît soluţia $\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(t)$ va trece prin $\bar{\boldsymbol{\xi}}$ ($\bar{\boldsymbol{\xi}}$ va avea forma vectorului $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, a_n)$ şi deci în baza teoremei 1.1, punctul 2, vom avea $\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t + \alpha; \bar{\boldsymbol{\xi}})$, α fiind o constantă. Se deduce deci

$$u_j[\boldsymbol{\psi}(t)] = \bar{\xi}_j \quad (= u_j[\boldsymbol{\varphi}(t + \alpha; \bar{\boldsymbol{\xi}})]),$$

ceea ce arată că într-adevăr funcţiile $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sînt integrale prime; aceste funcţii vor fi de clasă $C^1(V_{\mathbf{a}})$ în baza teoremei funcţiilor implicite, ţinînd seama că funcţiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ din (1.4) sînt de clasă C^1. Tot teorema funcţiilor implicite arată că rangul matricei jacobiene $\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_m}\right]$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, $m = 1, 2, \ldots, n$, este $n-1$, în $\mathbf{a}$, deoarece în caz contrar determinantul $\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(t, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})}$ n-ar fi nenul. ┘

Alte proprietăţi ale integralelor prime pentru sistemele diferenţiale vor fi analizate mai tîrziu (vezi 1.3).

1.2. Spaţiul fazelor. Traiectorii

Dacă se ia în consideraţie o soluţie $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ a sistemului diferenţial autonom (1.1), în domeniul $D_n \subset \mathbb{R}^n$, această soluţie va putea fi interpretată ca o curbă γ, numită *traiectorie* (sau *orbită*) care este parcursă, într-un sens determinat de către punctul $\mathbf{x}$, avînd coordonatele $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; este posibilă însă şi o altă interpretare a acestei soluţii şi anume considerînd că $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ defineşte direct nu un proces de deplasare, ci o traiectorie γ. Este clar că dacă se cunoaşte şi sensul de deplasare pe γ, atunci se ajunge la prima interpretare a acestei soluţii; viteza de deplasare pe traiectorie va fi determinată de vectorul $\mathbf{f}$ [deoarece $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi})$].

Spaţiul, avînd dimensiunea n, în care soluţiile sistemului diferenţial autonom (1.1) se interpretează ca traiectorii iar însuşi sistemul (1.1) se interpretează ca definind un cîmp vectorial, se numeşte *spaţiul fazelor* ataşat acestui sistem; în această situaţie, traiectoria $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ se numeşte *traiectorie* în spaţiul fazelor iar vectorul $\mathbf{f}$ defineşte în fiecare punct din D_n *viteza* din spaţiul fazelor.

Spaţiul fazelor ataşat unui sistem diferenţial autonom (1.1) nu este în mod obligatoriu un spaţiu euclidian cu n dimensiuni; astfel dacă $\mathbf{f}$ este un vector periodic, cu perioada $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ [deci $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, oricare ar fi $\mathbf{x} \in D_n$] spaţiul fazelor este o varietate n dimensională din $\mathbb{R}^{n+1}$, numită *tor*. În particular, dacă $n = 1$, deci $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, atunci spaţiul fazelor este frontiera cercului avînd raza $p/2\pi$.

Teorema de existenţă şi unicitate pentru sistemele diferenţiale arată că prin fiecare punct din D_n (în care $\mathbf{f} \in C^1$) trece o singură traiectorie a sistemului diferenţial (1.1), ceea ce înseamnă că întreg domeniul D_n este plin cu traiectorii ale sistemului. Aceste traiectorii, în baza teoremei 1.1, se află în una din următoarele situaţii: sau două traiectorii nu au nici un punct comun sau acestea coincid (dacă au un punct comun). În ultimul caz sînt două posibilităţi:

1. Pentru orice $t \in]a, b[$ avem $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{a}$, unde $\mathbf{a} \in D_n$ ($\mathbf{a}$ nedepinzînd de t); în acest caz se poate presupune $a = -\infty$ şi $b = +\infty$ şi deci pentru orice $t \in \mathbb{R}$ punctul din D_n avînd coordonatele $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este fixat.

Soluţia $\mathbf{x} = \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se numeşte *poziţie de echilibru* sau *de staţionaritate* pentru sistemul (1.1). Este uşor de stabilit că toate punctele de echilibru (staţionare) din D_n se obţin din egalitatea vectorială

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) = 0,\ \mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n),\ \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Într-adevăr, dacă $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{a}$, rezultă $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$, deci cum $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ iar $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, se deduce $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ și reciproc, dacă $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, vom obține sistemul de n ecuații (nediferențiale)

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

care dacă admite soluția $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, atunci $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ [deci $\varphi_j(t) = a_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$).

2. Există $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, astfel încît pentru orice $t \in]a, b[$ să avem $\boldsymbol{\varphi}(t + p) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ iar dacă $|t_1 - t_2| < p$, cel puțin pentru un indice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, să avem $\varphi_j(t_1) \neq \varphi_j(t_2)$; în acest caz, neapărat $a = -\infty$ și $b = +\infty$ (deoarece inegalitățile $a < t < b$ și $a < t + p < b$, deci $a - p < t < b - p$ nu sînt posibile dacă $a, b \in \mathbb{R}$) iar soluția $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ se numește *periodică cu perioada p*, traiectoria corespunzînd acestei soluții numindu-se *ciclu* sau *traiectoria închisă*.

Poziția de echilibru $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ este *stabilă*, dacă toate traiectoriile sistemului (1.1) $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})$, astfel încît $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\xi} \in V_{\mathbf{a}}$, rămîn în $V_{\mathbf{a}}$ și *instabilă* în caz contrar. Cazul $n = 2$ a fost tratat pe larg în vol. I, cap. 16.

1.3. Ecuații cu derivate parțiale liniare de ordinul întîi

1.3.1. Considerații generale

Ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi are forma

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \qquad (1.5)$$

unde $F : D_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcție cunoscută, de o clasă convenabilă: $F \in C^m$, $m \geqslant 2$, astfel încît cel puțin una din derivatele parțiale de ordinul întîi apare efectiv în F.

Problema care trebuie rezolvată în cazul ecuațiilor (1.5) este următoarea:

Să se determine $u : D_n^* \to \mathbb{R}$, $D_n^* \subset D_n$, $u \in C^1(D_n^*)$, astfel încît

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n), \frac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}\right) = 0,$$

$$\mathbf{x} \in D_n^*.$$

Funcția u astfel determinată se numește *soluție* a ecuației (1.5) și, ca și în cazul ecuațiilor diferențiale, de obicei se caută acele soluții care verifică în plus anumite condiții suplimentare. Dintre condițiile suplimentare cel mai des întîlnite, un rol deosebit îl ocupă *problema Cauchy*, care cere să se găsească acea soluție a ecuației (1.5) care verifică egalitatea

$$u|_S = u_0(\mathbf{x}) \qquad (1.6)$$

în care S este o hipersuprafață $n - 1$ dimensională din D_n cunoscută iar u_0 este de asemenea o funcție cunoscută (definită evident pe S). Cu alte cuvinte, a rezolva o problemă Cauchy (1.6) pentru ecuația (1.5) înseamnă a determina o soluție a acestei ecuații, definită într-o vecinătate a hipersuprafeței S, cunoscînd soluția în punctele lui S.

Faptul remarcabil care apare în legătură cu găsirea soluției problemei (1.6) pentru ecuația (1.5) este că această soluție se poate determina cunoscînd soluțiile unui sistem diferențial autonom, atașat ecuației (1.5). Trebuie reținut de asemenea că aspectele legate de rezolvarea ecuațiilor (1.5) nu sînt valabile în cazul sistemelor de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi.

Ecuația (1.5) se numește *liniară*, dacă F este funcție liniară în derivatele parțiale $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$, adică dacă are forma

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + f_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n), \qquad (1.5')$$

funcțiile $f_1, \ldots, f_n$, numite *coeficienții* acestei ecuații ca și funcția f_{n+1}, numită *termenul liber* al aceleiași ecuații, nedepinzînd de funcția necunoscută.

Ecuația (1.5) se numește *cvasiliniară*, dacă funcțiile $f_1, \ldots, f_n$ și f_{n+1} depind și de u, deci dacă are forma

$$f_1(x_1, \ldots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + f_n(x_1, \ldots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, u). \qquad (1.5'')$$

Dacă în ecuația (1.5′) termenul liber f_{n+1} este nul, adică dacă ecuația cu derivate parțiale (1.5′) se scrie

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \qquad (1.7)$$

vom spune că este o ecuație liniară și omogenă cu derivate parțiale de ordinul întîi.

În viitor va fi rezolvată problema Cauchy (1.6) pentru cazul general al ecuației (1.5), dar acum vom rezolva această problemă pentru cazul particular al ecuațiilor liniare și cvasiliniare, deoarece această rezolvare este simplă și utilizează numai noțiunea de integrală primă a unui sistem diferențial autonom.

În primul rînd, vom arăta că ecuația liniară și omogenă (1.7), cu n arbitrar, poate fi considerată cazul general al ecuațiilor de forma (1.5') sau (1.5''), adică vom arăta că aceste ecuații se reduc de fapt la ecuația (1.7); în acest scop, este important *artificiul lui Jacobi*, care constă în determinarea soluțiilor ecuației (1.5'') sub formă implicită. Astfel, dacă $V: D_n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este astfel încît soluția $u = u(x)$ a ecuației (1.5'') se obține prin explicitare din egalitatea $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = C$, unde C este o constantă dată [care, de exemplu, se poate determina din condiția ca $u(\mathbf{x}^0) = u^0$, deci $C = V(\mathbf{x}^0, u^0)$, cu $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D_n$, $u^0 \in \mathbb{R}$], deoarece

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$\left(\text{în ipoteza evidentă } \dfrac{\partial V}{\partial u} \neq 0\right)$, prin înlocuire în ecuația cvasiliniară (1.5'') se obține ecuația liniară și omogenă

$$f_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + f_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + \\ + f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \qquad (1.5''')$$

a cărei funcție necunoscută este V (nu u).

1.3.2. Determinarea soluțiilor ecuațiilor liniare și omogene

Luînd în considerație ecuația liniară și omogenă (1.7), cu ajutorul coeficienților $f_1, f_2, \ldots, f_n: D_n \to \mathbb{R}$ presupuși de clasă C^1 în D_n, se poate defini sistemul diferențial autonom

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, \ldots, x_n), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

care coincide cu sistemul (1.1). Acest sistem diferențial se numește *sistemul caracteristic* al ecuației cu derivate parțiale (1.7) iar orice soluție a sa se va numi *caracteristică* a ecuației (1.7) (sau *curbă caracteristică* a acestei ecuații).

Teorema 1.3. *Orice integrală primă a sistemului caracteristic* (1.1) *este o soluție particulară a ecuației cu derivate parțiale* (1.7) *și, reciproc, orice soluție a ecuației* (1.7) *este o integrală primă a sistemului caracteristic* (1.1).

⌐ Fie $\boldsymbol{\xi} \in D_n$ și $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t; \boldsymbol{\xi})$ soluția sistemului (1.1) cu proprietatea $\boldsymbol{\varphi}(0; \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$; utilizînd formula de derivare a funcțiilor compuse, avem

$$0 = \frac{d}{dt} u[\boldsymbol{\varphi}(t; \boldsymbol{\xi})]|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u[\boldsymbol{\varphi}(0; \boldsymbol{\xi})]}{\partial \xi_j} \cdot \dot{\varphi}(0; \boldsymbol{\xi})$$

dacă $u = u(\mathbf{x})$ este integrală primă a sistemului (1.1). Cum

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(0; \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\varphi}(0; \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi},$$

se deduce egalitatea $\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial u(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} f_j(\boldsymbol{\xi}) = 0$, valabilă pentru orice $\boldsymbol{\xi} \in D_n$, ceea ce înseamnă că u verifică ecuația (1.7).

Dacă u verifică în $D_n^* \subset D_n$ ecuația (1.7), pentru a arăta că $u = u(\mathbf{x})$ este o integrală primă pentru sistemul (1.1), trebuie să arătăm că $u[\boldsymbol{\varphi}(t)]$ nu depinde de t, $\boldsymbol{\varphi}$ fiind o soluție oarecare a sistemului (1.1); or, prin derivare, se obține

$$\frac{d}{dt} u[\boldsymbol{\varphi}(t)] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u[\boldsymbol{\varphi}(t)]}{\partial x_j} \dot{\varphi}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u[\boldsymbol{\varphi}(t)]}{\partial x_j} f_j(\boldsymbol{\varphi}) = 0;$$

avem dreptul să egalăm cu zero, deoarece $\boldsymbol{\varphi}(t) \in D_n$ și pentru fiecare $t \in]a, b[$ se obține un punct din D_n, punct în care ecuația se verifică. ⌋

Utilizînd teoremele 1.2 și 1.3, este ușor de arătat că orice sistem diferențial autonom (1.1) admite numai $n - 1$ integrale prime independente; într-adevăr, dacă $u = u(\mathbf{x})$ este o integrală primă oarecare iar $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ sînt cele $n - 1$ integrale prime independente obținute prin teorema 1.2, în baza teoremei 1.3 vom putea scrie egalitățile

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} f_j(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

care, în orice punct dintr-o vecinătate $V_{\mathbf{a}}$ a punctului $\mathbf{a} \in D_n$, care nu este punct de echilibru (staţionar) al sistemului (1.1), poate fi interpretat ca un sistem algebric liniar şi omogen, necunoscutele fiind $f_1(\mathbf{a}), \ldots, f_n(\mathbf{a})$. Deoarece $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq 0$, sistemul considerat va admite soluţii nebanale numai dacă determinantul coeficienţilor este nul; or acest determinant este chiar determinantul funcţional al integralelor prime $u, u_1, \ldots, u_{n-1}$, ceea ce arată că aceste integrale prime nu sînt independente.

Din consideraţiile anterioare se deduce un fapt extrem de important pentru cunoaşterea structurii soluţiilor ecuaţiei cu derivate parţiale (1.7): orice soluţie a acestei ecuaţii este o funcţie de cele $n-1$ integrale prime independente ale sistemului diferenţial caracteristic (1.1).

Pentru a justifica această afirmaţie, să utilizăm un rezultat din teoria funcţiilor de mai multe variabile: dacă $\frac{\partial(u, u_1, \ldots, u_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n} = 0$ în fiecare punct din $V_{\mathbf{a}}$ iar matricea jacobiană $\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_m}\right]$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$, $m = 1, 2, \ldots, n$, are rangul $n-1$, atunci există $U \in C^1$, funcţie de $n-1$ variabile, astfel încît

$$u = U(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}). \tag{1.8}$$

Deoarece la 1.1 s-a arătat că u definit prin (1.8) este o integrală primă a sistemului diferenţial (1.1), rezultă, în baza teoremei 1.3, că acest u este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (1.7), oricare ar fi funcţia U de clasă C^1. S-a determinat în acest mod o soluţie a ecuaţiei (1.7) care depinde de o funcţie arbitrară; vom conveni să numim această soluţie *soluţia generală* a ecuaţiei cu derivate parţiale (1.7).

Aşadar, dacă se cunosc cele $n-1$ integrale prime independente ale sistemului caracteristic (1.1), atunci problema integrării ecuaţiei cu derivate parţiale (1.7) este rezolvată: orice soluţie a sa se obţine prin particularizarea funcţiei U din soluţia generală (1.8).

După cum s-a constatat anterior, toate concuziile sînt valabile în vecinătatea oricărui punct din D_n [care este domeniul în care $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ este de clasă C^1] care nu este un punct de echilibru (staţionar) al sistemului caracteristic (1.1). Vom conveni să numim punctele de echilibru (staţionare) ale sistemului caracteristic (1.1) *puncte singulare* ale ecuaţiei cu derivate parţiale (1.7).

1.3.3. **Rezolvarea problemei Cauchy restrînse**

Să presupunem că problema Cauchy care trebuie rezolvată pentru ecuaţia (1.7) se scrie

$$u = u_0(x_1, \ldots, x_{n-1}) \text{ dacă } x_n = x_n^0. \tag{1.9}$$

Aici hipersuprafaţa $n-1$ dimensională este o mulţime deschisă din hiperplanul $x_n = x_n^0$, ceea ce implică $f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) \neq 0$ [în caz contrar, $u = x_n - x_n^0$ va verifica ecuaţia (1.7) şi nu va fi posibilă determinarea soluţiei avute în vedere dacă u_0 este oarecare]. Problema (1.9) pentru ecuaţia (1.7) se numeşte *problemă Cauchy restrînsă* pentru ecuaţia considerată. Scriind

$$u_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \bar{u}_1, \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \bar{u}_{n-1},$$

$u_1, \ldots, u_{n-1}$ fiind cele $n-1$ integrale prime ale sistemului caracteristic (1.1), deoarece aceste funcţii se presupun independente, este posibilă explicitarea variabilelor $x_1, \ldots, x_{n-1}$, obţinîndu-se

$$x_1 = \psi_1(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}), \ldots, x_{n-1} = \psi_{n-1}(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}),$$

iar soluţia căutată va fi

$$u = u_0[\psi_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ldots, \psi_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})],$$

unde u_0 este definit prin (1.9).

Într-adevăr, u fiind în realitate o funcţie de integralele prime $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, va verifica ecuaţia (1.7) iar dacă se înlocuieşte x_n prin x_n^0, se obţine

$$u|_{x_n = x_n^0} = u_0\,[\psi_1(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}), \ldots, \psi_{n-1}(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1})] = u_0(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Exemple. 2. Pentru ecuaţia liniară cu derivate parţiale

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

sistemul caracteristic este

$$\frac{dx_1}{dt} = 1, \ \frac{dx_2}{dt} = x_1, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = x_1 x_2 \ldots x_{n-1};$$

Forma simetrică a acestei sistem se va scrie

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{x_1} = \ldots = \frac{dx_n}{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}.$$

Din acest sistem se deduc ecuațiile cu variabile separate

$$x_1\, dx_1 = dx_2,\ x_2\, dx_2 = dx_3,\ \ldots,\ x_{n-1}\, dx_{n-1} = dx_n$$

care conduc la cele $n-1$ integrale prime ale sistemului caracteristic:

$$u_1 = x_1^2 - 2x_2,\ u_2 = x_2^2 - 2x_3,\ \ldots,\ u_{n-1} = x_{n-1}^2 - 2x_n.$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației va fi

$$u = U(x_1^2 - 2x_2,\ x_2^2 - 2x_3,\ \ldots,\ x_{n-1}^2 - 2x_n)$$

iar, în particular, pentru $n=3$, soluția problemei Cauchy $x_3 = x_3^0$, $u = x_1 + x_2$, $x_1 > 0$ $x_2 > 0$ va fi $u = \sqrt{x_2^2 - 2x_3 + 2x_3^0} + \sqrt{x_1^2 - 2x_2 + 2\sqrt{x_2^2 - 2x_3 + 2x_3^0}}$, după cum se deduce imediat, calculînd x_1 și x_2 din sistemul

$$x_1^2 + 2x_2 = \bar{u}_1, \quad x_2^2 - 2x_3^0 = \bar{u}_2$$

și înlocuind aceste valori (după ce în prealabil se scriu u_1 și u_2 în loc de $\bar{u}_1$ și $\bar{u}_2$) în $u = x_1 + x_2$.

3. Pentru a rezolva problema Cauchy $u = x_1^2$, $x_2 = 0$ pentru ecuația cvasiliniară

$$(x_2 + u)^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1(x_2 + 2u) \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 u$$

se consideră ecuația liniară corespunzătoare (prin artificiul lui Jacobi):

$$(x_2 + u)^2 \frac{\partial V}{\partial x_1} - x_1(x_2 + 2u) \frac{\partial V}{\partial x_2} + x_1 u \frac{\partial V}{\partial u} = 0,$$

pentru care sistemul caracteristic

$$\frac{dx_1}{dt} = (x_2 + u)^2,\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1(x_2 + 2u),\ \frac{du}{dt} = x_1 u$$

conduce la egalitățile

$$(x_2 + u)\, u' + (x_2' + u')\, u = 0,\ x_1 x_1' + x_2 x_2' - uu' = 0$$

care se integrează direct; integralele prime vor fi

$$V_1 = (x_2 + u)\, u, \qquad V_2 = x_1^2 + x_2^2 - u^2.$$

Soluția generală a ecuației va fi

$$V[(x_2 + u)\, u,\ x_1^2 + x_2^2 - u^2] = 0$$

iar soluția problemei Cauchy impusă se va obține prin explicitarea lui u din $x_2 u + u^2 = (x_2 u + x_1^2 + x_2^2)^2$ (deoarece pentru $x_2 = 0$, din integralele prime se obține sistemul $u^2 = \overline{V}_1$, $x_1^2 - u^2 = \overline{V}_2$, deci $u = \sqrt{\overline{V}_1}$, $x_1^2 = \overline{V}_1 + \overline{V}_2$ iar înlocuirea lui u și x_1^2 în $u = x_1^2$ va conduce la rezultatul enunțat).

4. *Ecuația cu derivate parțiale a funcțiilor omogene de grad m* (de clasă C^1). Dacă $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ și se verifică (pentru orice $t \in \mathbb{R}$) egalitatea

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

derivînd în raport cu t și punînd apoi $t=1$, se obține ecuația în cauză (numită și *identitatea lui Euler*)

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf$$

(dacă $m \in \mathbb{R}$, se presupune $t > 0$, iar dacă $n \in \mathbb{Z}$, avem $t \in \mathbb{R}$).

Reciproc, identitatea lui Euler este verificată numai de funcții omogene de grad m, deoarece sistemul caracteristic va fi

$$\frac{dx_1}{x_1} = \ldots = \frac{df}{mf}$$

iar scriind integralele prime sub forma

$$u_1 = \frac{x_2}{x_1},\quad u_2 = \frac{x_3}{x_1},\ \ldots,\ u_n = \frac{f}{x_1^m}$$

din soluția generală $V(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$, prin explicitarea lui u_n, se deduce $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^m\, U\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right)$ și este evidentă omogenitatea (de grad m) a lui f.

Problema Cauchy $f = \varphi(x_2, \ldots, x_n)$ pentru $x_1 = x_1^0 \neq 0$ conduce imediat la soluția

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)^m \varphi\left(x^0 \frac{x_2}{x_1}, \ldots, x^0 \frac{x_n}{x_1}\right),$$

oricare ar fi funcția cunoscută φ.

1.3.4. Rezolvarea problemei Cauchy generale

Dacă ecuației (1.7) se atașează condiția

$$u|_S = u_0(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.9'}$$

în ipoteza că S este o hipersuprafață $n-1$ dimensională din D_n, vom spune că este necesară rezolvarea unei *probleme Cauchy generale* pentru ecuația liniară cu derivate parțiale în cauză.

În ipoteza că hipersuprafaţa S este definită prin egalitatea

$$G(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{1.10}$$

unde G este o funcţie de clasă C^1 în variabilele sale, această problemă Cauchy se poate reduce la problema Cauchy restrînsă, tratată în 1.3.2, prin efectuarea unei schimbări de variabilă de clasă C^1 de forma

$$\bar{x}_\alpha = \bar{x}_\alpha(x_1, \ldots, x_n),\ \bar{x}_n(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, n-1,$$

în ipoteza $\dfrac{\partial(\bar{x}_\alpha)}{\partial(x_j)} = \det\left[\dfrac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_j}\right] \neq 0$. Într-adevăr, deoarece

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_j},$$

ecuaţia (1.7) se transformă într-o ecuaţie de aceeaşi formă

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \bar{f}_\alpha \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_\alpha} = 0,\ \bar{f}_\alpha = \sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial x_j},\ \alpha = 1, 2, \ldots, n,$$

căreia i se ataşează problema Cauchy restrînsă

$$u|_S = u|_{\bar{x}_n = 0} = u_0(\bar{x}),$$

care, conform cu 1.3.2, va admite o soluţie dacă $\bar{f}_n \neq 0$ (cel puţin în vecinătatea lui $S \subset D_n$). Or condiţia $\bar{f}_n \neq 0$ este echivalentă cu $\sum_{j=1}^{n} f_j \dfrac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} f_j \dfrac{\partial G}{\partial x_j} \neq 0$, ceea ce înseamnă că hipersuprafaţa S, definită prin (1.10), trebuie astfel aleasă încît funcţia G să nu verifice ecuaţia cu derivate parţiale (1.7); în acest mod, s-a arătat că orice problemă Cauchy generală (1.9′) admite cel puţin o soluţie, dacă hipersuprafaţa iniţială S verifică condiţia anterioară. Această soluţie poate fi determinată în acelaşi mod ca şi în cazul problemei Cauchy restrînse; dacă se cunosc cele $n-1$ integrale prime independente ale sistemului caracteristic, prin determinarea valorilor $x_1, \ldots, x_n$ din sistemul compatibil:

$$u_1(x_1, \ldots, x_n) = \bar{u}_1, \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = \bar{u}_{n-1}, G(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

şi scriind $u = u_0\,[\psi_1(u_1, \ldots, u_{n-1}), \ldots, \psi_n(u_1, \ldots, u_{n-1})]$, dacă $x_j = \psi_j(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}), j = 1, \ldots, n$.

Din punct de vedere geometric, problema Cauchy (1.9′) înseamnă a determina soluţia ecuaţiei (1.7) în vecinătatea hipersuprafeţei S cunoscîndu-se restricţia soluţiei pe S.

Problema Cauchy generală (1.9′) poate fi rezolvată şi în cazul în care hipersuprafaţa S este definită parametric prin egalităţile

$$x_j = h_j(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}),\ j = 1, \ldots, n,$$

în ipoteza că rangul matricei $\left[\dfrac{\partial h_j}{\partial t_k}\right]$ este $n-1$; acest caz va fi tratat ulterior (vezi 1.4).

Exemplul 5. Se cere funcţia care pe suprafaţa $x_2 = x_1^3$ din $\mathbb{R}^3$ devine $u = x_1^3$ şi care verifică ecuaţia cvasiliniară

$$x_1 u \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 u \frac{\partial u}{\partial x_2} = -x_1 x_2.$$

Sistemul caracteristic admite integralele prime $u_1 = \dfrac{x_1}{x_2}$ şi $u_2 = u^2 + x_1 x_2$ şi deci, rezolvînd sistemul

$$x_2 = x_1^3,\ \frac{x_1}{x_2} = \bar{u}_1,\ u^2 - x_1 x_2 = \bar{u}_2,$$

se obţine

$$x_1 = \frac{1}{\bar{u}_1},\quad x_2 = \frac{1}{\bar{u}_2^2},\quad u = \bar{u}_2 - \frac{1}{\bar{u}_1 \bar{u}_2^2}$$

iar egalitatea rămasă $u = x_1^3$ conduce la relaţia care trebuie să existe între integralele prime pentru a se obţine soluţia căutată.

Această relaţie se scrie $\dfrac{1}{u_1^6} + \dfrac{1}{u_1^3} = u_2$, iar înlocuirile conduc la soluţia $u^2 + x_1 x_2 = \dfrac{x_1^6 + x_1^3 x_2^3}{x_1^6}$.

1.3.5. Unicitatea soluției problemei Cauchy

Unicitatea soluțiilor problemelor Cauchy rezolvate anterior se poate demonstra cu ajutorul următorului rezultat:

Teorema 1.4 (*lema lui Haar*). *Dacă $V = V(t, \mathbf{x})$ este o funcție reală de clasă C^1 pe mulțimea $D_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $D_{n+1} = \{t, \mathbf{x} \mid 0 \leqslant t < d, |x_j| \leqslant L(a - t), j = 1, 2, \ldots, n, \alpha < a\}$, verificînd condițiile*

$$|V(0, \mathbf{x})| < A, \quad \left|\frac{\partial V}{\partial t}\right| \leqslant B \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial V}{\partial x_j}\right| + M|V| + N, \tag{1.11}$$

unde $A \geqslant 0$, $N \geqslant 0$, $B > 0$, $M > 0$ sînt numere reale, atunci în D_{n+1} se verifică inegalitatea

$$|V(t, \mathbf{x})| \leqslant A \exp(Mt) + N \frac{\exp(Mt) - 1}{M}. \tag{1.12}$$

⌐ Fie $\varepsilon > 0$ și să considerăm funcția

$$u(t, \mathbf{x}) = (A + \varepsilon) \exp(Mt) + (N + \varepsilon) \frac{\exp(Mt) - 1}{M}$$

care, după cum se verifică ușor, este o soluție a ecuației $\frac{\partial u}{\partial t} = M \cdot u + (N + \varepsilon)$; dacă se arată că în D_{n+1} avem $u(t, \mathbf{x}) - V(t, \mathbf{x}) > 0$, se obține, făcînd $\varepsilon \to 0$, inegalitatea $v(t, \mathbf{x}) \leqslant A \exp(Mt) + N \frac{\exp(Mt) - 1}{M}$ iar inegalitatea în cauză se găsește scriind $-V$ în loc de V. Deoarece $u(0, \mathbf{x}) = A + \varepsilon$, avem $u(0, \mathbf{x}) - V(0, x) > 0$ [deoarece $-A < V(0, \mathbf{x}) < A$, deci $-A < -V(0, \mathbf{x}) < A$], așadar pentru $t > 0$ suficient de mic, va fi verificată inegalitatea $u(t, \mathbf{x}) - V(t, \mathbf{x}) > 0$; fie $(t^0, \mathbf{x}^0) \in D_{n+1}$, unde $0 < t^0 \leqslant \alpha$ iar $u(t^0, \mathbf{x}^0) - V(t^0, \mathbf{x}^0) = 0$, dar pentru $0 \leqslant t \leqslant t^0$ să avem $u(t, \mathbf{x}) - V(t, \mathbf{x}) > 0$. Se verifică ușor că deoarece $|x_j^0| \leqslant L(a - t^0)$, atunci $(t, \mathbf{x}) = (t, \pm L(t^0 - t) + x_1^0, \ldots, \pm L(t^0 - t) + x_n^0) \in D_{n+1}$ dacă $0 \leqslant t \leqslant t^0$ și $|x_j^0 \pm L(t^0 - t)| \leqslant \leqslant L(a - t)$. În punctele $(t, \mathbf{x})$, pentru orice alegere a semnelor $\pm$, avem $u(t, \mathbf{x}) - V(t, \mathbf{x}) > 0$ dacă $0 \leqslant t < t^0$ iar $u(t^0, \mathbf{x}) - V(t^0, \mathbf{x}) = 0$, ceea ce face ca toate derivatele parțiale ale diferenței $u - V$ să nu fie pozitive în $(t^0, \mathbf{x}^0)$ și deci

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - V) + \sum_{j=1}^{n} (\pm L) \frac{\partial}{\partial x_j}(u - V) \leqslant 0 \text{ în } (t^0, \mathbf{x}^0).$$

Cum $\frac{\partial u}{\partial t} = Mu + (N + \varepsilon) = M\,V + (N + \varepsilon)$, ultima egalitate avînd loc în $(t^0, \mathbf{x}^0)$, vom deduce $\frac{\partial u}{\partial t} = M|v| + (N + \varepsilon)$ și deoarece $\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, în punctul $(t^0, \mathbf{x}^0)$ este verificată inegalitatea

$$\frac{\partial V}{\partial t} \geqslant M|v| + (N + \varepsilon) + L \sum_{j=1}^{n} \left(\pm \frac{\partial V}{\partial x_j}\right).$$

Alegînd semnele $\pm$ astfel încît $\pm \frac{\partial V}{\partial x_j} = \left|\frac{\partial V}{\partial x_j}\right|$ în (t^0, x^0), se obține o inegalitate care contrazice (1.11). ⌟

Trecînd la problema unicității soluției problemei Cauchy restrînse (1.9) pentru ecuația (1.7) și presupunînd $x_n = t$, deoarece prin ipoteză $f_n \neq 0$, ecuația (1.7) se va putea scrie și sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n-1} f_j \frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{1.13}$$

Dacă pentru $t = t^0$ am avea două soluții u_1 și u_2 ale problemei Cauchy $u|_{t=t^0} = u_0(x_1, \ldots, x_{n-1})$, atunci, notînd $V = u_1 - u_2$, V va verifica ecuația (1.13) și plus $V|_{t=t^0} = 0$; dacă $|f_j| \leqslant B$ în D_n, din (1.13) se deduce (adăugind termenul $|V|$):

$$\frac{\partial V}{\partial t} \leqslant B \sum_{j=1}^{n-1} \left|\frac{\partial V}{\partial x_j}\right| + |V|, \quad |V|\Big|_{t=t^0} = 0.$$

Comparînd cu (1.11), se deduce $A = 0$, $M = 1$, $N = 0$, ceea ce din (1.12) antrenează $V = 0$, adică $u_1 = u_2$.

Este ușor de verificat valabilitatea teoremei de unicitate atît în cazul problemei Cauchy generale cît și pentru cazul ecuațiilor cvasiliniare cu derivate parțiale de ordinul întîi.

1.3.6. Determinarea integralelor prime

După cum s-a văzut, integralele prime ale sistemelor diferențiale joacă un rol important în considerațiile anterioare și de aceea este important a indica modul în care acestea se pot obține. În

cazul general, nu se pot da metode efective de găsire a acestor integrale prime; dacă însă sistemul diferențial normal

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = f_j(t, x_1, \ldots, x_n),\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.14}$$

este astfel încît funcțiile f_j sînt olomorfe pentru $|t| < a$, $|x_j| < a$, $j = 1, 2, \ldots, n$, cele n integrale prime independente vor fi

$$u_j = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^m}{m!} \mathrm{A}^m x_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.15}$$

unde A este operatorul diferențial liniar

$$\mathrm{A} = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial t}, \tag{1.15'}$$

f_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, fiind definiți prin sistemul (1.14) iar A^m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, sînt iteratele acestui operator:

$$\mathrm{A}^0 = 1,\ A^1 = \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^m = \mathrm{A}(\mathrm{A}^{m-1}), \ldots$$

Fără a insista asupra convergenței seriilor (1.15), vom spune doar că acestea sînt absolut și uniform convergente pentru

$$|t| \leqslant T < \min\left\{ka, \frac{a(1-k)^{n+2}}{M(n+2)}\right\},\ |x_j| \leqslant k\,a,\ 0 < k < 1,$$

dacă $M = \max\limits_{D_{n+1}} \{|f_1|, \ldots, |f_n|\}$. Calculînd $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_j(x_1, \ldots, x_n)$, în care $x_1, \ldots, x_n$ s-au înlocuit cu o soluție oarecare a sistemului (1.14), găsim:

$$\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^m}{m!} \mathrm{A}^m x_j = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-t)^{m-1}}{(m-1)!} \mathrm{A}^m x_j +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^m}{m!} \left[\frac{\partial \mathrm{A}^m x_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\mathrm{A}^m x_j)}{\partial x_k} \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\right] = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^m}{m!} \mathrm{A}^{m+1} x_j +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^m}{m!} \left[\frac{\partial(\mathrm{A}^m x_j)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial(\mathrm{A}^m x_j)}{\partial x_k}\right] = 0,$$

deoarece $\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{A}^m x_j) + \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathrm{A}^m x_j) = (\mathrm{A}^m x_j) = \mathrm{A}^{m+1} x_j$.

Așadar, cele n funcții (1.15) sînt integrale prime ale sistemului diferențial (1.14); ele sînt independente, pentru că dacă, de exemplu $u_k = \varphi(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_n)$, φ fiind o funcție olomorfă în cele $n-1$ variabile ale sale, se deduce

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^m}{m!} \mathrm{A}^m [x_k - \varphi(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)] = 0 \tag{1.15''}$$

și pentru $t = 0$, găsim $x_k = \varphi(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, ceea ce nu este posibil deoarece $x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n$ sînt variabile independente. Egalitatea (1.15'') se deduce imediat, ținînd seama de dezvoltarea în seria Taylor a funcției φ.

Dacă sistemul (1.14) este autonom, cu ajutorul operatorului diferențial $\mathrm{A} = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ se vor obține funcțiile

$$w_j(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^m}{m!} \mathrm{A}^m x_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

iar integralele prime căutate se pot găsi eliminînd parametrul t.

Exemplul 6. Fie sistemul autonom

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2,\ \ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = x_1,$$

căruia îi va corespunde operatorul diferențial

$$\mathrm{A} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Se verifică ușor că $\mathrm{A}^m x_j = x_j$ dacă m este par iar $\mathrm{A}^m x_j = x_k$ dacă m este impar, $j, k = 1, 2$, $k \neq j$ și deci seriile $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^m}{m!} \mathrm{A}^m x_j$, $j = 1, 2$, vor fi convergente pentru orice t, x_1 și x_2, obținîndu-se

$$w_1(t, x_1, x_2) = x_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2m}}{(2m)!} + x_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2m+1}}{(2m+1)!} = x_1 \operatorname{ch} t - x_2 \operatorname{sh} t,$$

$$w_2(t, x_1, x_2) = x_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2m}}{(2m)!} + x_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^{2m+1}}{(2m+1)!} = x_2 \operatorname{ch} t - x_1 \operatorname{sh} t,$$

Integrala primă independentă de t a sistemului dat va fi $w_1^2 - w_2^2 = x_1^2 - x_2^2$.

O altă metodă utilizată în determinarea integralelor prime este aceea a *combinațiilor integrabile*; astfel, scriind sistemul autonom (1.1) sub formă simetrică

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n},$$

prin combinație integrabilă se înțelege forma diferențială $\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j(\mathbf{x})\, dx_j$ în ipoteza că funcțiile de o clasă dată $a_1, \ldots, a_n$ au fost astfel determinate încît $\sum_{j=1}^{n} f_j\, a_j = 0$. În această situație, o integrală primă va fi funcția $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ cu proprietatea

$$du = \sum_{j=1}^{n} a_j(\mathbf{x})\, dx_j,$$

du fiind diferențiala funcției u [deoarece este evident că în ipotezele amintite u este constant pe curbele integrale ale sistemului în cauză, pentru că $du = \sum_{j=1}^{n} a_j(\mathbf{x})\, dx_j = \sum_{j=1}^{n} a_j(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x})\, dt = 0$, utilizînd egalitățile $dx_j = f_j\, dt$].

Exemplul 7. Sistemul diferențial simetric

$$\frac{dx_1}{a_2 x_3 - a_3 x_2} = \frac{dx_2}{a_3 x_1 - a_1 x_3} = \frac{dx_3}{a_1 x_2 - a_2 x_1}, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},$$

admite două combinații integrabile evidente:

$$a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 \ \text{ și } \ x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3,$$

deoarece $a_1(a_2x_3 - a_3x_2) + a_2(a_3x_1 - a_1x_3) + a_3(a_1x_2 - a_2x_1) = 0$ și $x_1(a_2x_3 - a_3x_2) + x_2(a_3x_1 - a_1x_3) + x_3(a_1x_2 - a_2x_1) = 0$, iar prin integrare se obțin două integrale prime independente ale sistemului:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, \quad u_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

8. În cazul sistemului diferențial simetric

$$\frac{dx_1}{x_3 - x_1} = \frac{dx_2}{x_3 - x_2} = \frac{dx_3}{2x_3}$$

o combinație integrabilă va fi

$$\frac{1}{x_2 - x_1} dx_1 - \frac{1}{x_2 - x_1} dx_2 - \frac{1}{2x_3} dx_3,$$

deoarece

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} - \frac{2x_3}{2x_3} = 0,$$

iar o integrală primă va fi $\ln|x_2 - x_1| + \frac{1}{2}\ln|x_3|$ sau, ceea ce este același lucru, $u_1 = (x_1 - x_2)^2 x_3$.

Fie

$$u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_k(\mathbf{x})$$

$k < n - 1$ integrale prime independente ale sistemului diferențial autonom (1.1); cu ajutorul funcțiilor $u_1, \ldots, u_k$ se poate reduce numărul ecuațiilor sistemului (1.1) cu k unități, adică acest sistem se poate înlocui printr-un alt sistem diferențial autonom dar avînd $n - k$ ecuații. În paticular, pentru $k = n - 1$, sistemul (1.1) poate fi înlocuit printr-o singură ecuație diferențială de ordinul întîi, care va putea fi integrată.

Pentru a justifica afirmația, este suficient să se înlocuiască variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prin noile variabile $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, punînd

$$\bar{x}_1 = u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \bar{x}_k = u_k(x_1, \ldots, x_n), \ \bar{x}_{k+1} = x_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n = x_n;$$

această schimbare de variabile va avea evident jacobianul nenul (în baza ipotezei că rangul matricei $\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_m}\right]$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $m = 1, 2, \ldots, n$, este egal cu k și putem presupune că determinantul $\left|\frac{\partial u_j}{\partial x_n}\right|$, $j, m = 1, 2, \ldots, n$, este nenul (altfel fiind suficientă o schimbare în notațiile variabilelor $x_1, \ldots, x_n$). Prin calcul direct se obține

$$\frac{d\bar{x}_j}{dt} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \dot{x}_m = \sum_{m=1}^{n} f_m \frac{\partial u}{\partial x_m}, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

și vom avea $\dot{\bar{x}}_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$, deoarece, u fiind o integrală primă a sistemului diferențial considerat, va verifica ecuația cu derivate parțiale (1.7); celelalte ecuații ale sistemului vor fi

$$\frac{d\bar{x}_j}{dt} = \bar{f}_j(\bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n), \quad j = k + 1, \ldots, n,$$

unde

$$\bar{f}_j(\bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n) = f[x_1(\bar{x}_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, x_1(\bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n), \bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n],$$
$$j = k+1, \ldots, n,$$

variabilele $x_1, \ldots, x_k$ ca funcţii de $\bar{x}_{k+1}, \ldots, \bar{x}_n$ fiind deduse din schimbarea de variabilă utilizată.

Rezultatul anterior este valabil şi în cazul ecuaţiilor cu derivate parţiale (1.7) : dacă $u_1, \ldots, u_{k-1}$, $k < n-1$, sînt soluţii independente ale acestei ecuaţii, atunci cu ajutorul schimbării de variabile independente utilizate mai sus, în locul ecuaţiei (1.7) se poate considera ecuaţia

$$\sum_{j=k+1}^{n} \bar{f}_j(\bar{x}_{k+1}, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_j} = 0.$$

Justificarea acestei afirmaţii se poate face prin calcul direct sau ţinînd seama de sistemele caracteristice ale celor două ecuaţii.

Exemplul 9. În cazul ecuaţiei

$$(x_3 x_4 - x_1 x_2^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 x_3 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3^2 \frac{\partial u}{\partial x_3} + x_3 x_4 \frac{\partial u}{\partial x_4} = 0,$$

sistemul caracteristic

$$\frac{dx_1}{x_3 x_4 - x_1 x_2^2} = \frac{dx_2}{x_2 x_3} = \frac{dx_3}{x_3^2} = \frac{dx_4}{x_3 x_4}$$

admite două integrale prime evidente :

$$u_1 = \frac{x_3}{x_2}, \qquad u_2 = \frac{x_4}{x_2}.$$

Notind $\bar{x}_1 = \frac{x_3}{x_2}$, $\bar{x}_2 = \frac{x_4}{x_2}$ se deduce $x_3 = \bar{x}_1 x_2$, $x_4 = \bar{x}_2 x_2$ şi deci prima ecuaţie a sistemului se va scrie

$$\frac{dx_1}{x_2^2(\bar{x}_1 x_2 - x_1)} = \frac{dx_2}{\bar{x}_1 x_2^2}$$

şi deoarece de-a lungul caracteristicilor avem $\bar{x}_1 = \text{const}$, $\bar{x}_2 = \text{const}$ (deoarece $\dot{\bar{x}}_1 = 0$ $\dot{\bar{x}}_2 = 0$), prin integrare se obţine

$$(\bar{x}_1 \bar{x}_2 - x_1) \exp\left(\frac{x_2}{\bar{x}_1}\right) = c_3,$$

ceea ce înseamnă că a treia integrală primă a sistemului caracteristic va fi

$$u_3 = \left(\frac{x_3 x_4}{x_2^2} - x_1\right) \exp\left(\frac{x_2^2}{x_3}\right).$$

1.3.7. Interpretări geometrice

Vom lua în consideraţie ecuaţia liniară şi neomogenă cu derivate parţiale

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} = f_{n+1}(\mathbf{x}) \tag{1.16}$$

şi fie $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ o soluţie a sa definită în domeniul $D_n \subset \mathbb{R}^n$. În spaţiul $\mathbb{R}^{n+1}$, mulţimea punctelor $(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in D_n$, va defini o suprafaţă S, care se numeşte *suprafaţă integrală* a ecuaţiei (1.16) ; deoarece ecuaţia (1.16) se mai poate scrie şi sub forma

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + (-1) f_{n+1} = 0,$$

această egalitate poate fi interpretată ca o condiţie de ortogonalitate între vectorii $(f_1, \ldots, f_n, f_{n+1})$ şi $(\nabla u, -1)$ $\left[\nabla u = \nabla u(x_1, \ldots, x_n)\right.$ are componentele $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$, dacă u este diferenţiabilă$\left.\right]$.

Aşadar, deoarece $(\nabla u, -1)$ reprezintă parametrii directori ai normalei la S în punctul $\mathbf{x}$, se deduce că o suprafaţă S din $\mathbb{R}^{n+1}$ va fi o suprafaţă integrală pentru ecuaţia (1.16) dacă planul tangent la S în orice punct conţine vectorul $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_{n+1})$.

Dacă $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ este o soluţie a ecuaţiei omogene (1.7), atunci interpretarea geometrică anterioară rămîne valabilă cu diferenţă că este vorba de ortogonalitatea dintre vectorul normal la suprafaţa $S_1 \subset D_n$ definită prin $u(x_1, \ldots, x_n) = \text{const}$ şi vectorul $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$.

O proprietate geometrică importantă a suprafeţelor integrale ale ecuaţiei (1.16) este aceea că această suprafaţă este loc geometric de curbe caracteristice ale ecuaţiei ; într-adevăr, dacă S are un punct comun cu o curbă caracteristică γ, vom avea

$$u^0 = u(\mathbf{x}^0),\ x_1^0 = \varphi_1(t^0), \ldots, x_n^0 = \varphi_n(t^0),\ u^0 = \varphi_{n+1}(t^0),\ t^0 \in]a, b[,$$

dacă acest punct comun are coordonatele $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^0) = (\mathbf{x}^0, u^0)$ iar γ are ecuațiile

$$x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n(t), u = \varphi_{n+1}(t),\ a < t < b.$$

Cum $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ este o integrală primă a sistemului caracteristic, vom avea $u[\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)] = \text{const}$, dacă $t \in]a, b[$, valoarea constantei putîndu-se determina particularizînd parametrul t; luînd $t = t^0$, găsim

$$u[\varphi_1(t^0), \ldots, \varphi_n(t^0)] = u^0,$$

ceea ce înseamnă că pentru orice $t \in]a, b[$ avem $u[\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)] = u^0$, adică $\gamma \subset S$.

Această proprietate a suprafețelor integrale stă la baza metodei lui Cauchy de rezolvare a problemei Cauchy, care va fi expusă în 1.4.

Dacă S_1 și S_2 sînt două suprafețe integrale ale ecuației (1.16) care au un punct comun P_0, atunci acestea vor avea în comun și curba caracteristică care trece prin P_0 [în particular, pentru $n = 2$ orice două suprafețe integrale ale ecuației $f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = h(x, y)$ se intersectează de-a lungul unei curbe carcteristice]; într-adevăr, în baza faptului că din $\gamma \cap S_1 = P_0$, $\gamma \cap S_2 = P_0$ se deduce $\gamma \subset S_1$ și $\gamma \subset S_2$, și cum γ fiind curba caracteristică ce trece prin P_0 este unic determinată, rezultă $\gamma \subset S_1 \cap S_2$.

Exemple. 10. *Ecuația cu derivate parțiale a suprafețelor cilindrice* din $\mathbb{R}^n$, adică a suprafețelor riglate obținute prin deplasarea prin paralelism a unei drepte date de-a lungul unei varietăți $n-2$ dimensionale Γ date (numită varietate directoare a cilindrului) va fi

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = a_n$$

dacă ecuația carteziană a cilindrului este $u = u(x_1, \ldots, x_{n-1})$ iar $(a_1, \ldots, a_n)$ sînt parametrii directori ai dreptei fixe; într-adevăr, în fiecare punct al suprafeței planul tangent va trebui să conțină dreapta paralelă cu dreapta dată care trece prin acest punct, deci vectorii $(a_1, \ldots, a_n)$ și $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}, -1\right)$ sînt ortogonali, ceea ce este echivalent cu ecuația scrisă anterior. Pentru a găsi cilindrul care ne interesează, trebuie rezolvată o problemă Cauchy.

În particular, cilindrul din $\mathbb{R}^3$ care are generatoarele paralele cu dreapta cu parametrii directori (1,2,3) și curba generatoare cercul $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, se obține căutînd soluția ecuației

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 3$$

care pentru $z = 0$ devine $x^2 + x^2 = R^2$. Scriind sistemul caracteristic sub formă simetrică

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{3},$$

se obțin integralele prime

$$u_1 = 2x - y, \quad u_2 = 3x - z$$

iar pentru $z = 0$ găsim $x = \frac{1}{3}\bar{u}_2$, $y = \frac{2}{3}\bar{u}_2 - \bar{u}_1$. Funcția căutată se obține înlocuind u_1 și u_2 în egalitatea

$$\frac{1}{9}u_2^2 + \left(\frac{2}{3}u_2 - u_1\right)^2 = R^2,$$

adică ecuația carteziană a cilindrului căutat va fi

$$(3x - z)^2 + (3y - 2z)^2 = 9R^2.$$

11. *Ecuația cu derivate parțiale a suprafețelor conice* din $\mathbb{R}^n$, adică a suprafețelor riglate formate din mulțimea dreptelor care trec printr-un punct fix (vîrful conului) și printr-o varietate $n-2$ dimensională dată (varietatea directoare a conului) va fi

$$\sum_{j=1}^{n-1} (x_j - a_j)\frac{\partial u}{\partial x_j} = u - a_n$$

dacă ecuația carteziană a conului este $u = u(x_1, \ldots, x_{n-1})$ iar vîrful conului are coordonatele $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; într-adevăr, dacă $(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)$ este un punct oarecare al suprafeței conice, dreapta care trece prin acest punct și vîrful conului va trebui să fie conținută în planul tangent la con corespunzător acestui punct. Rezultă deci condiția de ortogonalitate a vectorilor

$$(x_1 - a_1, \ldots, x_{n-1} - a_{n-1}, u - a_n) \text{ și } \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}, -1\right)$$

care conduce la ecuația scrisă anterior.

În particular, conul din $\mathbb{R}^3$ care are vîrful în punctul $(-1, 1, -1)$ iar varietatea directoare este curba $x^2 - y^2 = 1$, $z = 0$ se obține căutînd soluția ecuației

$$(x+1)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-1)\frac{\partial z}{\partial y} = z + 1,$$

care pentru $z = 0$ devine $x^2 - y^2 = 1$. Sistemul caracteristic fiind

$$\frac{dx}{x+1} = \frac{dy}{y-1} = \frac{dz}{z+1},$$

se deduc integralele prime

$$u_1 = \frac{x+1}{z+1}, \quad u_2 = \frac{y-1}{z+1}$$

iar pentru $z=0$ găsim $x=\bar{u}_1-1$, $y=\bar{u}_2+1$; ecuaţia carteziană a conului căutat se obţine înlocuind u_1 şi u_2 din egalitatea

$$(u_1-1)^2-(u_2+1)^2=1$$

şi va fi $(x-z)^2-(y+z)^2=(z+1)^2$.

Din ecuaţia cu derivate parţiale a suprafeţelor conice şi din exemplul 4 se deduce o proprietate caracteristică a suprafeţelor conice : orice suprafaţă omogenă în $(x_1-a_1),\ldots,(x_{n-1}-a_{n-1})$, $(u-a_n)$ reprezintă un con din $\mathbb{R}^n$ cu vîrful în $(a_1,\ldots,a_n)$.

1.4. Teoria geometrică a ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întîi

Metoda Cauchy pentru ecuaţii cvasiliniare se bazează pe interpretările geometrice obţinute la punctul 1.3.6 : orice suprafaţă integrală se obţine ca loc geometric al curbelor caracteristice care se sprijină pe varietatea iniţială. Intuitiv, această metodă constă în a arăta că dacă $V \subset D_n$ este varietatea iniţială a problemei (este vorba de rezolvarea unei probleme Cauchy), atunci suprafaţa integrală S se obţine considerînd mulţimea caracteristicilor ecuaţiei care au un punct comun cu V.

Teorema 1.5. *Dacă în ecuaţia cvasiliniară* $(n \geqslant 2)$

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(\mathbf{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f_{n+1}(\mathbf{x}, u) \tag{1.17}$$

funcţiile $f_1,\ldots,f_{n+1}$ *sînt de clasă* C^1 *în* $D_n \times \mathbb{R}$ *iar pe suprafaţa* $n-1$ *dimensională* V *de clasă* C^1 *din* D_n *reprezentată parametric*

$$x_1 = x_1^0(s_1,\ldots,s_{n-1}),\ \ldots,\ x_n = x_n^0(s_1,\ldots,s_{n-1}) \tag{1.17'}$$

(variabilele independente $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_{n-1})$ *parcurgînd domeniul* G_{n-1} *pentru ca* $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ *să parcurgă pe* V*) se cunosc valorile iniţiale ale soluţiei* u*, adică*

$$u|_V = u^0(s_1,\ldots,s_{n-1}), \tag{1.17''}$$

funcţiile $x_1^0,\ldots,x_n^0$, u^0 *fiind de clasa* $C^1(G_{n-1})$, *astfel încît*

$$\begin{vmatrix} f_1(\mathbf{x}^0, u^0) & \dfrac{\partial x_1^0}{\partial s_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_1^0}{\partial s_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(\mathbf{x}^0, u^0) & \dfrac{\partial x_n^0}{\partial s_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n^0}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.17'''}$$

va exista o singură soluţie $u=u(\mathbf{x})$ *a ecuaţiei, definită într-o vecinătate a varietăţii* V *care satisface condiţia iniţială*

$$u[\mathbf{x}^0(\mathbf{s})] = u^0(\mathbf{s}).$$

⌈ În baza ipotezelor făcute asupra coeficienţilor ecuaţiei (1.17), sistemul caracteristic

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = f_j(x_1,\ldots,x_n, u),\ j=1, 2,\ldots, n,$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f_{n+1}(x_1,\ldots,x_n, u)$$

va admite soluţii unic determinate, dacă se cunosc valorile iniţiale. Presupunînd că datele iniţiale sînt chiar funcţiile $x_1^0(\mathbf{s}),\ldots,x_n^0(\mathbf{s})$, $u^0(\mathbf{s})$, găsim ecuaţiile parametrice ale soluţiei căutate :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1[t\,;\,x_1^0(\mathbf{s}),\ldots,x_n^0(\mathbf{s}), u^0(\mathbf{s})] = x_1(t, s_1,\ldots,s_{n-1}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n &= x_n[t\,;\,x_1^0(\mathbf{s}),\ldots,x_n^0(\mathbf{s}), u^0(\mathbf{s})] = x_n(t, s_1,\ldots,s_{n-1}),\\ u &= u[t\,;\,x_1^0(\mathbf{s}),\ldots,x_n^0(\mathbf{s}), u^0(\mathbf{s})] = u(t, s_1,\ldots,s_{n-1}). \end{aligned} \tag{1.18}$$

În baza teoremelor de dependenţă a soluţiilor sistemelor diferenţiale de condiţiile iniţiale şi de parametri se deduce că funcţiile $x_1,\ldots,x_n$ şi u sînt de clasă C^1 în toate variabilele şi în plus vor fi satisfăcute condiţiile iniţiale prescrise :

$$\begin{aligned} x_1(0, s_1,\ldots,s_{n-1}) &= x_1^0(s_1,\ldots,s_{n-1}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n(0, s_1,\ldots,s_{n-1}) &= x_n^0(s_1,\ldots,s_{n-1}),\\ u(0, s_1,\ldots,s_{n-1}) &= u^0(s_1,\ldots,s_{n-1}). \end{aligned}$$

Determinantul funcţional $\frac{\partial(x_1, \ldots x_n)}{\partial(t, s_1, \ldots, s_{n-1})}$ va fi nenul în vecinătatea lui $t = 0$, deoarece pentru $t = 0$ acest jacobian coincide cu determinantul (1.17‴), care este nenul prin ipoteză; conform cu teorema funcţiilor implicite, din primele n egalităţi ale sistemului (1.18) se pot explicita (în vecinătatea lui V) variabilele $t, s_1, \ldots, s_{n-1}$:

$$t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t(\mathbf{x}),$$
$$s_1 = s_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = s_1(\mathbf{x}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_{n-1} = s_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = s_{n-1}(\mathbf{x}).$$

Înlocuind aceste funcţii în ultima egalitate (1.18), se va obţine soluţia căutată

$$u = u[t(\mathbf{x}), s_1(\mathbf{x}), \ldots, s_{n-1}(\mathbf{x})] = g(x_1, \ldots, x_n).$$

Într-adevăr, pentru $t = 0$ (adică pe V) avem

$$u|_S = u|_{t=0} = g|_S = u(t, s_1, \ldots, s_{n-1})|_{t=0} = u^0(s_1, \ldots, s_{n-1}) = u^0(\mathbf{s}),$$

ceea ce înseamnă că este satisfăcută condiţia iniţială (1.17); funcţia g va verifica şi ecuaţia (1.17), deoarece $g \in C^1$ iar

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(\mathbf{x}, g)\frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial s_1}\frac{\partial s_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial s_{n-1}}\frac{\partial s_{n-1}}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}\sum_{j=1}^{n} f_j\frac{\partial t}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial s_1}\sum_{j=1}^{n} f_j\frac{\partial s_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial s_{n-1}}\sum_{j=1}^{n} f_j\frac{\partial s_{n-1}}{\partial x_j} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} = f_{n+1}(\mathbf{x}, g)$$

în baza observaţiei că din egalităţile

$$t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$s_1 = s_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_{n-1} = s_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se deduce

$$\frac{\partial s_k}{\partial t} = 0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial s_k}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} f_j\frac{\partial s_k}{\partial x_j}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\frac{\partial t}{\partial t} = 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial t}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} f_j\frac{\partial t}{\partial x_j},$$

utilizînd independenţa variabilelor $(t, s_1, \ldots, s_{n-1})$.

Unicitatea acestei soluţii decurge direct din teorema de unicitate demonstrată în 1.3.5. ┘

Exemple. 12. Dacă se rezolvă problema Cauchy $x-y=2$, $2x+z=1$ pentru ecuaţia

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-z)\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

prin metoda anterioară, trebuie găsite soluţiile sistemului caracteristic

$$\frac{dx}{dt} = x - z, \quad \frac{dy}{dt} = y - z, \quad \frac{dz}{dt} = 2z$$

care pentru $t=0$ devin x_0, y_0, z_0 respectiv; fiind în cauză un sistem liniar, se obţin uşor soluţiile

$$x = (x_0 + z_0)\exp(t) - z_0\exp(2t),$$
$$y = (y_0 + z_0)\exp(t) - z_0\exp(2t),$$
$$z = z_0\exp(2t).$$

O reprezentare parametrică pentru condiţiile iniţiale poate fi

$$x_0 = s, \; y_0 = s - 2, \; z_0 = 1 - 2s$$

şi deci ecuaţiile parametrice ale soluţiei căutate vor fi

$$x = (1 - s)\exp(t) - (1 - 2s)\exp(2t),$$
$$y = (-1 - s)\exp(t) - (1 - 2s)\exp(2t),$$
$$z = (1 - 2s)\exp(2t).$$

Eliminarea parametrilor t şi s conduce la soluţia sub formă carteziană

$$(x - y)(3x + y + 4z) - 4z = 0,$$

deoarece $\exp(t) = \frac{1}{2}(x-y)$, $3x+y+4z=(2-4s)\exp(t)$, adică $s = \frac{x + y - 2z}{y - x}$.

13. Se cere soluţia ecuaţiei cvasiliniare

$$(y + xz)\frac{\partial z}{\partial x} + (x + yz)\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - 1$$

care trece prin parabola $y=1$, $z=x^2$.

Sistemul caracteristic fiind

$$\frac{dx}{y + xz} = \frac{dy}{x + yz} = \frac{dz}{z^2 - 1}$$

sau

$$\frac{dx}{dt} = y + xz,\quad \frac{dy}{dt} = x + yz,\quad \frac{dz}{dt} = z^2 - 1,$$

forma simetrică arată că două integrale prime vor fi $u_1 = \frac{x + y}{z - 1}$, $u_2 = \frac{x - y}{z + 1}$; presupunînd $z = t + z_0$, din sistemul $x + y = u_1(z-1)$, $x - y = u_2(z+1)$, cum u_1 şi u_2 sînt constanţi pe caracteristici, se deduce forma parametrică a curbelor caracteristice

$$x = \frac{x_0 z_0 + y_0}{z_0^2 - 1}t - \frac{y_0 z_0 + x_0}{z_0^2 - 1},\quad y = \frac{y_0 z_0 + x_0}{z_0^2 - 1}t - \frac{x_0 z_0 + y_0}{z_0^2 - 1},\quad z = t + z_0,$$

din care, utilizînd reprezentarea parametrică a parabolei iniţiale $x_0 = s$, $y_0 = 1$, $z_0 = s^2$, se deduc ecuaţiile parametrice ale soluţiei:

$$x = \frac{s^3 + 1}{s^4 - 1}t - \frac{s^2 + s}{s^4 - 1},\quad y = \frac{s^2 + s}{s^4 - 1}t - \frac{s^3 + 1}{s^4 - 1},\quad z = t + s^2.$$

În demonstraţia teoremei 1.5 un rol esenţial îl joacă condiţia (1.17‴); să vedem ce semnificaţie are această ipoteză.

Dacă $n = 2$, rezultă $x_1^0 = \varphi_1(s)$, $x_2^0 = \varphi_2(s)$ iar determinantul fiind $f_1\,\varphi_2'(s) - f_2\,\varphi_1'(s)$, acesta va fi egal cu zero numai dacă

$$\frac{d\varphi_1}{f_1} = \frac{d\varphi_2}{f_2},$$

deci dacă curba iniţială este caracteristică; prin urmare, în cazul $n = 2$, orice problemă Cauchy pentru o ecuaţie cvasiliniară admite o singură soluţie dacă şi numai dacă curba care poartă datele este necaracteristică pe orice porţiune a sa (în caz contrar soluţia nu este unic determinată).

Dacă $n > 2$, determinanţii funcţionali

$$\nu_1 = \frac{\partial(x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0)}{\partial(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})},\quad \nu_2 = \frac{\partial(x_1^0, x_3^0, \ldots, x_n^0)}{\partial(s_1, s_2, \ldots, x_{n-1})}, \ldots, \nu_n = \frac{\partial(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0)}{\partial(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1})},$$

sînt parametrii directori ai normalei $\mathbf{v} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ la suprafaţa $n - 1$ dimensională V, considerată ca suprafaţă care poartă datele iniţiale; din (1.17‴) se deduce $|\nu| > 0$ [altfel determiantul din (1.17‴) ar fi nul] şi rezultă că pe V vectorul $\mathbf{v}$ nu este este ortogonal pe cîmpul vectorial $\mathbf{f}_0 = (f_1(\mathbf{x}^0, u^0), \ldots, f_n(\mathbf{x}^0, u^0))$. Prin urmare, pentru suprafeţele V care sînt astfel încît vectorul normal la V este ortogonal în fiecare punct la $\mathbf{f}_0$, problema Cauchy pentru ecuaţia cvasiliniară (1.17) nu este rezolvabilă în sensul teoremei 1.5: este posibil să existe mai multe soluţii pentru aceeaşi problemă Cauchy.

1.5. Ecuaţia neliniară cu derivate parţiale de ordinul întîi şi cu două variabile independente

1.5.1. Conul lui Monge

Ecuaţia generală cu derivate parţiale de ordinul întîi pentru o funcţie necunoscută z, unde $z: D_2 \to \mathbb{R}$, D_2 fiind un domeniu din $\mathbb{R}^2$, va fi

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \qquad (1.19)$$

dacă $F: D_2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este o funcţie dată, cel puţin de clasă C^2; utilizînd notaţiile lui Monge

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

ecuaţia (1.19) se va scrie

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \qquad (1.19')$$

Problema Cauchy pentru aceste ecuaţii cu derivate parţiale poate fi rezolvată ca şi în cazul ecuaţiilor cvasiliniare

$$f_1(x, y, z)\,p + f_2(x, y, z)\,q = f_3(x, y, z), \qquad (1.20)$$

cu ajutorul soluţiilor unui sistem diferenţial autonom ataşat ecuaţiei (1.19), dar elementele geometrice care conduc la determinarea efectivă a soluţiilor nu vor fi curbe ci noţiuni geometrice mai complexe, obţinute prin ataşarea la unele curbe din $\mathbb{R}^3$ a unor varietăţi plane.

Fie $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ astfel încît prin acest punct să treacă o suprafaţă integrală $z = z(x, y)$ a ecuaţiei (1.19); deoarece planul tangent la suprafaţa în cauză în acest punct are parametrii directori $(p, q, -1)$, unde $p = p(x_0, y_0)$, $q = q(x_0, y_0)$, se vor verifica egalităţile

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0, \tag{1.19''}$$

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = z - z_0. \tag{1.21}$$

În acest mod, oricărui punct $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ prin care trec suprafeţe integrale a ecuaţiei (1.19) i se ataşează nu un singur plan tangent, ci o familie (care depinde de un parametru) de astfel de plane tangente, deoarece din (1.19'') se deduce prin parametrizare

$$p = p(t), \quad q = q(t), \quad t \in I, \tag{1.22}$$

unde I este un interval dat. Înlocuind p şi q definiţi prin (1.22) în (1.21), pentru fiecare $t \in I$ se obţine un plan tangent bine determinat; mulţimea acestor plane tangente vor admite o suprafaţă din $\mathbb{R}^3$ ca suprafaţă înfăşurătoare [pentru fiecare punct (x_0, y_0, z_0) astfel considerat] care va fi un con, numit *conul lui Monge* (vezi fig. 1.1).

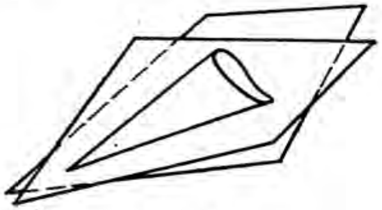

Fig. 1.1

Prin urmare, conul lui Monge ataşat ecuaţiei (1.19) în punctul (x_0, y_0, z_0) este suprafaţa din $\mathbb{R}^3$, definită ca înfăşurătoare a familiei cu un parametru de plane (1.21) în care p şi q verifică ecuaţia (1.19''); ecuaţia acestui con se poate deduce eliminînd parametrul t între egalităţile

$$(x - x_0)\, q(t) + (y - y_0)\, q(t) = z - z_0, \quad (x - x_0)\, p'(t) + (y - y_0)\, q'(t) = 0$$

sau, ceea ce este acelaşi lucru, între egalităţile

$$\frac{x - x_0}{z - z_0}\, p(t) + \frac{y - y_0}{z - z_0}\, q(t) = 1, \quad \frac{x - x_0}{z - z_0}\, p'(t) + \frac{y - y_0}{z - z_0}\, q'(t) = 0.$$

Cum aceste egalităţi sînt echivalente cu

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = \frac{q'}{pq' - qp'}, \quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = \frac{-p'}{pq' - qp'}$$

şi deoarece din $F[x_0, y_0, z_0, p(t), q(t)] = 0$, notînd $\frac{\partial F}{\partial p} = P$, $\frac{\partial F}{\partial q} = Q$, se deduce $Pp'(t) + Qq'(t) = 0$ $\left(\text{ceea ce înseamnă că raportul } -\frac{p'}{q'}\right.$ se poate înlocui prin raportul $\left.\frac{Q}{P}\right)$, rezultă egalităţile

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = \frac{P}{pP + qQ}, \quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = \frac{Q}{pP + qQ}, \tag{1.23}$$

adică

$$x - x_0 = kP, \; y - y_0 = kQ, \; z - z_0 = k(pP + qQ), \tag{1.23'}$$

k fiind un coeficient de proporţionalitate.

Egalităţile (1.23') conduc la ecuaţia conului lui Monge prin eliminarea lui p şi q (se obţine o funcţie omogenă în $x - x_0$, $y - y_0$ şi $z - z_0$, ceea ce conform cu exemplele 4 şi 11, va defini un con în $\mathbb{R}^3$).

Dacă ecuaţia (1.19) este ecuaţia cvasiliniară (1.20), cum $pP + qQ = f_1 p + f_2 q = f_3$, ecuaţiile (1.23') vor fi

$$x - x_0 = kf_1(x_0, y_0, z_0),\; y - y_0 = kf_2(x_0, y_0, z_0),\; z - z_0 = kf_3(x_0, y_0, z_0),$$

deci vor defini o dreaptă în $\mathbb{R}^3$; în această situaţie, conul lui Monge degenerează într-o dreaptă, numită dreapta lui Monge, ceea ce face ca în cazul ecuaţiilor cvasiliniare (1.20) planele tangente la suprafeţele integrale care trec prin punctul (x_0, y_0, z_0) să formeze un fascicol avînd dreapta lui Monge ca axă.

Așadar, din punct de vedere geometric, ecuația cu derivate parțiale (1.19) definește un cîmp de conuri în $\mathbb{R}^3$, cu proprietatea că o suprafață din $\mathbb{R}^3$ este o suprafață integrală a acestei ecuații dacă și numai dacă este tangentă în fiecare punct al acestui con.

1.5.2. **Curbe caracteristice**

Prin analogie cu definiția curbelor caracteristice pentru ecuațiile cvasiliniare (1.20), prin curbe caracteristice ale ecuației neliniare (1.19) se vor înțelege curbele integrale ale direcțiilor de contact dintre

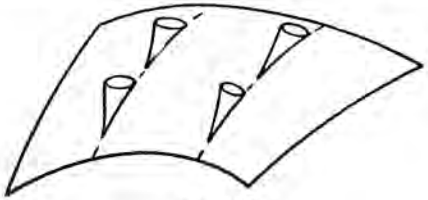

Fig. 1.2

planele tangente la o suprafață integrală și conurile lui Monge corespunzătoare (vezi fig. 1.2). Pentru a găsi ecuațiile diferențiale ale acestor curbe caracteristice vom face observația că în baza celor deduse la 1.5.1, deoarece conul lui Monge se obține prin eliminarea lui p și q între egalitățile

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0, \tag{1.24}$$

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) - (z - z_0) = 0, \quad \frac{x - x_0}{P} = \frac{y - y_0}{Q},$$

rezultă că generatoarele acestui con (adică dreptele de contact dintre planele tangente și con) vor fi definite prin ultimele două egalități (1.24), ceea ce conduce la ecuațiile acestor drepte:

$$\frac{x - x_0}{P} = \frac{y - y_0}{Q} = \frac{z - z_0}{pP + qQ}.$$

Prin urmare, curbele caracteristice ale ecuației (1.19) vor verifica fie sistemul simetric

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{pP + qQ}, \tag{1.25}$$

fie sistemul autonom

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, z, p, q), \ \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z, p, q), \ \frac{dz}{dt} = pP + qQ. \tag{1.25'}$$

În ipoteza ca suprafața integrală $z = z(x, y)$ nu este cunoscută, ecuațiile diferențiale (1.25′) nu pot determina curbele caracteristice, deoarece apar cinci funcții necunoscute și numai trei ecuații diferențiale; așadar, sistemul caracteristic trebuie completat cu încă două ecuații care se pot deduce ușor, observînd că

$$\frac{dp}{dt} = p_x \frac{dx}{dt} + p_y \frac{dy}{dt} = p_x P + p_y Q,$$

$$\frac{dq}{dt} = q_x \frac{dx}{dt} + q_y \frac{dy}{dt} = q_x P + q_y Q,$$

iar cum $p_y = q_x = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$ (în ipoteza $z \in C^2$), notînd

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z}$$

și derivînd ecuația (1.19) în raport cu x, apoi în raport cu y, avem

$$X + Zp + Pp_x + Qq_x = 0,$$

$$Y + Zq + Pp_y + Qq_y = 0,$$

de unde se deduc ecuațiile

$$\frac{dp}{dt} = -(X + pZ), \quad \frac{dq}{dt} = -(Y + qZ).$$

Așadar, sistemul diferențial al caracteristicilor ecuației (1.19) va fi

$$\frac{dx}{dt} = P, \ \frac{dy}{dt} = Q, \ \frac{dz}{dt} = pP + qQ,$$
$$\frac{dp}{dt} = -X - pZ, \ \frac{dq}{dt} = -Y - qZ. \tag{1.25''}$$

Prin urmare, la o suprafață integrală dată $z = z(x, y)$ a ecuației cu derivate parțiale (1.19) se atașează o familie de curbe definite prin funcțiile $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, soluțiile sistemului autonom (1.25′), iar de-a lungul acestor curbe se obțin și funcțiile $p(t)$ și $q(t)$, obținute prin integrarea ultimelor două ecuații din sistemul caracteristic (1.25″).

Exemplul 14. În cazul ecuației cu derivate parțiale

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1,$$

adică, utilizînd notațiile lui Monge,

$$F(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2 - 1.$$

Conul lui Monge se va obține eliminînd p și q între ecuațiile

$$p^2 + q^2 = 1,\ p(x - x_0) + q(y - y_0) = z - z_0,\ \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q},$$

deoarece $P = 2p$, $Q = 2q$, ceea ce conduce la ecuația carteziană a acestor conuri

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (z - z_0)^2;$$

caracteristicile se obțin prin integrarea sistemului diferențial

$$\frac{dx}{dt} = 2p,\ \frac{dy}{dt} = 2q,\ \frac{dz}{dt} = 2(p^2 + q^2),\ \frac{dp}{dt} = 0,\ \frac{dq}{dt} = 0,$$

dică

$$x(t) = 2p_0 t + x_0,\ y(t) = 2q_0 t + y_0,\ z(t) = 2(p_0^2 + q_0^2) t + z_0,\ p = p_0,\ q = q_0.$$

1.5.3. Benzi caracteristice

Din considerațiile anterioare se deduce că la sistemul (1.25″) al ecuațiilor caracteristicilor ecuației cu derivate parțiale (1.19) mai trebuie atașată și egalitatea (1.19′), ceea ce face să se obțină un sistem supraabundent. Aceasta însă nu este decît o aparență, deoarece funcția $F = F(x, y, z, p, q)$ determinată prin ecuația (1.19′) este în realitate o integrală primă a sistemului caracteristic (1.25″), deoarece

$$\frac{dF}{dt} = X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} + P\frac{dp}{dt} + Q\frac{dq}{dt} =$$

$$= XP + YQ + Z(pP + qQ) - P(X + pZ) - Q(Y + pZ) = 0.$$

Prin urmare, dacă în punctul inițial x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, definit de soluțiile sistemului (1.25″) pentru $t = 0$, avem $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$ pentru orice $t \in I$, I fiind intervalul maxim de definiție al soluțiilor sistemului caracteristic (1.25″) va rezulta

$$F[x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)] = 0; \qquad (1.26)$$

deci, alegînd condițiile inițiale pentru sistemul diferențial (1.25″) astfel încît să se verifice egalitatea $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$, va rezulta (1.26) pentru orice $t \in I$.

În $\mathbb{R}^3$ o soluție a sistemului caracteristic (1.25″) va defini o curbă γ, dacă luăm în considerație soluțiile

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in I;$$

în plus, în fiecare punct al lui γ, se mai atașează numerele $(p, q, -1)$ care definesc un plan în același spațiu.

Vom spune că pentru t fixat în I, numerele $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $p(t)$, $q(t)$ vor defini un element al unei benzi, adică la un punct al curbei γ se atașează un anumit plan (care conține tangenta la γ în acest punct); cînd t parcurge I, mulțimea acestor elemente vor defini o bandă caracteristică pentru ecuația (1.19) (vezi fig. 1.3).

De observat că nu orice cinci funcții $(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$ definesc o bandă: trebuie ca planele definite cu funcțiile $(p(t), q(t), -1)$ să fie tangente la curba $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, ceea ce conduce la condiția

$$\frac{dz(t)}{dt} = p(t)\frac{dx(t)}{dt} + q(t)\frac{dy(t)}{dt},\ t \in I,$$

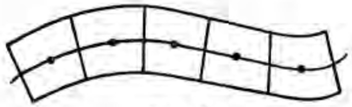

Fig. 1.3

[care în particular, este satisfăcută în cazul sistemului caracteristic (1.25″), în baza celei de-a treia ecuații a sistemului].

Teorema 1.6. *Dacă o bandă caracteristică are cel puțin un element* x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 *comun cu o suprafață integrală* S *a ecuației* (1.19), *atunci această bandă caracteristică este în întregime cuprinsă în* S.

⌈ Dacă $S \subset \mathbb{R}^3$ este definită prin $z = f(x, y)$, vom avea $\left(\text{cu } \frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \frac{\partial f}{\partial y} = f_y\right)$

$$F[x, y, f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y)] = 0, \qquad (x, y) \in D_2,$$

dacă $f : D_2 \to \mathbb{R}$; vom presupune f de clasă $C^2(D_2)$. Se pot considera ecuaţiile diferenţiale

$$\frac{dx}{dt} = P[x, y, f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y)], \qquad P = \frac{\partial F}{\partial p},$$

$$\frac{dy}{dt} = Q[x, y, f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y)], \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial q},$$

cărora le ataşăm condiţiile iniţiale $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$; cum $P, Q \in C^1$, teorema de existenţă şi unicitate conduce la funcţiile

$$x = x(t), \; y = y(t), \; t \in I,$$

care împreună cu

$$z = f[x(t), y(t)], \quad t \in I.$$

vor defini o curbă din $\mathbb{R}^3$, aflată evident pe S; putem presupune în plus $f(x_0, y_0) = z_0$, adică $f[x(0), y(0)] = z_0$. Teorema va fi demonstrată dacă vom arăta $f_x(x_0, y_0) = p_0$, $f_y(x_0, y_0) = q_0$ iar $\frac{df}{dt} = f_x P + f_y Q$, $\frac{df_x}{dt} = -X - f_x Z$, $\frac{df_y}{dt} = -Y - f_x Z$. Or, dacă $z(t) = f[x(t), y(t)]$, se deduce

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = f_x P + f_y Q,$$

$$\frac{df_x}{dt} = f_{xx} \frac{dx}{dt} + f_{xy} \frac{dy}{dt} = f_{xx} P + f_{xy} Q,$$

$$\frac{df_y}{dt} = f_{yx} \frac{dx}{dt} + f_{yy} \frac{dy}{dt} = f_{xy} P + f_{yy} Q$$

şi este evident că $\frac{df}{dt}$ verifică ecuaţia amintită; derivînd egalitatea

$$F[x, y, f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y)] = 0, \qquad (x, y) \in D_2,$$

în raport cu x, apoi în raport cu y şi înlocuind apoi x şi y prin $x(t)$ şi $y(t)$, se găsesc :

$$X + Z f_x + P f_{xx} + Q f_{xy} = 0 \Rightarrow f_{xx} P + f_{xy} Q = -X - f_x Z,$$

$$Y + Z f_y + P f_{xy} + Q f_{yy} = 0 \Rightarrow f_{xy} P + f_{yy} Q = -Y - f_y Z,$$

ceea ce înseamnă că sînt verificate şi ultimele două ecuaţii diferenţiale. Condiţiile iniţiale $f_x(0,0) = p_0$, $f_y(0, 0) = q_0$ sînt verificate, deoarece prin ipoteză banda caracteristică are în comun cu S elementul x_0, y_0, z_0, p_0, q_0. ⌋

Această teoremă este importantă deoarece cu ajutorul ei se poate indica modul geometric de rezolvare a problemei Cauchy

$$u|_\gamma = u_0(x, y)$$

pentru ecuaţia $F(x, y, z, p, q) = 0$, unde γ este o curbă din $\mathbb{R}^3$ iar u_0 o funcţie cunoscută pe γ : este suficient să se considere toate benzile caracteristice ale ecuaţiei care au puncte comune cu γ. Mulţimea acestor benzi caracteristice va genera suprafaţa integrală căutată. Rezolvarea efectivă a acestei probleme va fi dată la punctul 1.5.5.

1.5.4. Conoidul caracteristic

Dacă x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 sînt valorile iniţiale pentru sistemul caracteristic (1.25''), atunci fixînd punctul de coordonate $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, mulţimea caracteristicilor care trec prin acest punct vor defini o suprafaţă din $\mathbb{R}^3$ care se numeşte *conoidul caracteristic* al ecuaţiei (1.19) cu vîrful în (x_0, y_0, z_0) [deoarece $x = x(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, $y = y(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, $z = z(t; x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ în care x_0, y_0 şi z_0 sînt fixaţi iar din condiţia $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0$ se deduce o relaţie între p_0 şi q_0; în concluzie x, y şi z vor depinde doar de doi parametri] (vezi fig. 1.4).

Conoidul caracteristic al ecuaţiei (1.19) avînd vîrful în (x_0, y_0, z_0) nu coincide cu conul lui Monge avînd acelaşi vîrf, decît în anumite

cazuri particulare, deoarece conul lui Monge este determinat cu ajutorul tangentelor în (x_0, y_0, z_0) duse la caracteristicile care definesc conoidul caracteristic [parametrii directori ai tangentei la o carac-

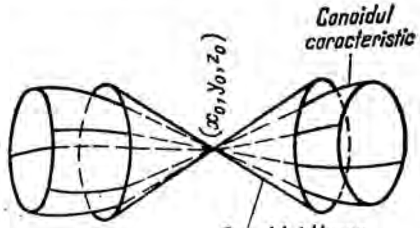

Fig. 1.4

ristică ce trece prin (x_0, y_0, z_0) sînt $P, Q, pP + qQ$ calculați pentru $x = x_0$, $y = y_0$ și $z = z_0$ iar p și q verifică ecuația $F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0$, de unde se deduce imediat că tangentele la caracteristicile care trec prin (x_0, y_0, z_0) definesc conul lui Monge cu vîrful în acest punct].

Evident, conoidul caracteristic astfel definit are vîrful său ca punct singular și în plus, fiind format cu ajutorul caracteristicilor ecuației (1.19), va fi o suprafață integrală a acestei ecuații.

Exemplul 15. În cazul ecuației cu derivate parțiale de la exemplul 11 conoidul caracteristic cu vîrful în x_0, y_0, z_0 se va obține prin eliminarea parametrilor t, p_0 și q_0 între egalitățile

$$x = 2p_0 t + x_0,\ y = 2q_0 t + y_0,\ z = 2(p_0^2 + q_0^2) t + z_0,\ p_0^2 + q_0^2 = 1;$$

se obține $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (z - z_0)^2$, ceea ce înseamnă că în cazul ecuației $p^2 + q^2 = 1$, conoidul caracteristic coincide cu conul lui Monge.

În cazul ecuației $p^2 + q^2 = z$, ecuația carteziană a conului lui Monge se găsește eliminînd p și q între

$$p^2 + q^2 = z_0,\ \frac{x - x_0}{2p} = \frac{y - y_0}{2q},\ p(x - x_0) + q(y - y_0) = z - z_0;$$

se obține $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = z_0(z - z_0)^2$; pentru a obține ecuația carteziană a conoidului caracteristic, se deduc benzile caracteristice

$$x = x_0 + 2p_0 (e^t - 1),\ y = y_0 + 2q_0 (e^t - 1),\ z = z_0 e^{2t},\ p = p_0 e^t,\ q = q_0 e^t$$

prin integrarea sistemului diferențial

$$\frac{dx}{dt} = 2p,\ \frac{dy}{dt} = 2q,\ \frac{dz}{dt} = 2z,\ \frac{dp}{dt} = p,\ \frac{dq}{dt} = q$$

și se elimină parametrii t, p_0 și q_0. Rezultă ecuația

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 4(\sqrt{z} - \sqrt{z_0})^2$$

care diferă de ecuația carteziană a conului lui Monge.

1.5.5. Existența soluției problemei Cauchy

Fie $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ o curbă de clasă C^1 definită prin ecuațiile parametrice

$$x = x_0(s),\ y = y_0(s),\ z = z_0(s),\ s \in J, \tag{1.27}$$

funcțiile x_0 și y_0 verificînd condiția restrictivă

$$\frac{dx_0}{P} \neq \frac{dy_0}{Q}, \tag{1.28}$$

unde $P = \frac{\partial F}{\partial p}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial q}$ sînt calculați pentru $x = x_0(s)$, $y = y_0(s)$, $z = z_0(s)$, $p = p_0(s)$, $q = q_0(s)$, funcțiile x_0, y_0 și z_0 fiind definite prin (1.27) iar funcțiile de clasă C^1, p_0 și q_0 sînt astfel alese încît se verifică sistemul

$$\begin{aligned} &F[x_0(s), y_0(s), z_0(s), p_0(s), q_0(s)] = 0, \\ &z_0'(s) = p_0(s)\, x_0'(s) + q_0(s)\, y_0'(s), \qquad s \in J. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Dacă acest sistem admite mai multe soluții în p_0 și q_0, se alege una.

Condițiile (1.29) definesc o bandă inițială $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, formată cu ajutorul curbei γ și a planelor tangente la γ avînd în punctul $(x(s), y(s), z(s))$ parametrii directori $(p_0(s), q_0(s), -1)$. Conform cu cele expuse în 1.5.3, soluția $z = z(x, y)$ căutată a ecuației $F(x, y, z, p, q) = 0$ care verifică condiția

$$z[x_0(s), y_0(s)] = z_0(s), \qquad s \in J,$$

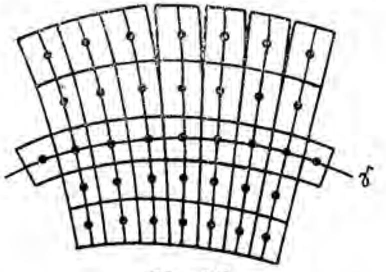

Fig. 1.5

se poate obține considerînd mulțimea benzilor caracteristice ale ecuației date care au ca element inițial banda inițială $(x_0, y_0, t_0, p_0, q_0)$. (vezi fig. 1.5). Altfel spus, ecuațiile parametrice ale suprafeței integrale căutate vor fi

$$x = f(t, s),\ y = g(t, s),\ z = h(t, s), \tag{1.30}$$

unde f, g şi h sînt soluţiile sistemului caracteristic (presupuse de clasă C^2)

$$\frac{dx}{dt}=P,\ \frac{dy}{dt}=Q,\ \frac{dz}{dt}=pP+qQ,\ \frac{dp}{dt}=-X-pZ,\ \frac{dq}{dt}=-Y-pZ$$

care pentru $t=0$ devin

$$f(0,s)=x_0(s),\ g(0,s)=y_0(s),\ h(0,s)=z_0(s)$$

şi, în plus,

$$p(0,s)=p_0(s),\ q(0,s)=q_0(s).$$

Rezultă că problema Cauchy pentru ecuaţia $F=0$ va fi rezolvată dacă arătăm că într-adevăr din (1.30) se poate deduce $z=z(x,y)$ astfel încît $F[x,y,z(x,y),z_x(x,y),z_y(x,y)]=0$ pentru x şi y în vecinătatea oricărui punct al curbei γ. Or, deoarece se verifică (1.28), rezultă

$$\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(t,s)}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial s}\right|_{t=0}-\left.\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{t=0}=Py_0'-Qx_0'\neq 0,$$

deci, pentru t suficient de mic, avem $\frac{\partial(f,g)}{\partial(t,s)}\neq 0,\ s\in J$, iar teorema funcţiilor implicite permite explicitarea lui t şi s:

$$t=t(x,y),\ s=s(x,y)$$

(deci $x=f[t(x,y),s(x,y)]$, $y=g[t(x,y),s(x,y)]$. În acest mod, se poate defini $z(x,y)$ punînd

$$z(x,y)=h[t(x,y),\ s(x,y)] \tag{1.30'}$$

şi rămîne de arătat că funcţia $z(x,y)$ verifică toate cerinţele. În primul rînd $z\in C^1$ fiind o funcţie compusă cu ajutorul unor funcţii de clasă C^1; apoi, deoarece $F(x,y,z,p,q)=0$ în ipoteza că x,y,z,p,q parcurg o bandă caracteristică, mai rămîn de verificat egalităţile $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$. Pentru aceasta, se consideră funcţia $u=u(t,s)$, definită astfel:

$$u(t,s)=\frac{\partial h}{\partial s}-p\frac{\partial f}{\partial s}-q\frac{\partial g}{\partial s}, \tag{1.31}$$

în care

$$p=p[t(x,y),\ s(x,y)],\ q=q[t(x,y),\ s(x,y)],$$

p şi q fiind soluţiile corespunzătoare ale sistemului caracteristic; avem

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 h}{\partial s\,\partial t}-\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial s}-p\frac{\partial^2 f}{\partial s\,\partial t}-q\frac{\partial^2 q}{\partial s\,\partial t}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial h}{\partial t}-p\frac{\partial f}{\partial t}-q\frac{\partial g}{\partial t}\right)+\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial g}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial s}=$$

$$=\frac{\partial p}{\partial s}P+\frac{\partial q}{\partial s}Q+\frac{\partial f}{\partial s}(X+pZ)+\frac{\partial q}{\partial t}(Y+qZ)$$

dacă se ţine seama de ecuaţiile sistemului caracteristic. Adunînd şi scăzind $Z\frac{\partial h}{\partial s}$, se obţine

$$\frac{\partial u}{\partial t}=X\frac{\partial f}{\partial s}+Y\frac{\partial g}{\partial s}+Z\frac{\partial h}{\partial s}+P\frac{\partial p}{\partial s}+Q\frac{\partial q}{\partial s}-$$

$$-Z\left(\frac{\partial h}{\partial s}-p\frac{\partial f}{\partial s}-q\frac{\partial g}{\partial s}\right)=\frac{\partial F}{\partial s}-Zu=-Zu,$$

deoarece din $F=0$ se deduce $\frac{\partial F}{\partial s}=0$; ecuaţia $\frac{\partial u}{\partial t}=-Zu$ astfel obţinută poate fi interpretată ca o ecuaţie diferenţială şi deoarece $u|_{t=0}=0$, din (1.31) se deduce $u(0,s)=\frac{dz_0}{ds}-p_0\frac{dx_0}{ds}-q_0\frac{dy_0}{ds}=0$, în baza lui (1.29) singura soluţie posibilă va fi $u(t,s)=0$ pentru orice t şi s. Se obţine

$$\frac{\partial h}{\partial s}=p\frac{\partial f}{\partial s}+q\frac{\partial g}{\partial s} \tag{1.32}$$

pentru orice t şi s; pe de altă parte, înlocuind în $z=z(x,y)$ variabilele $x=f(t,s)$, $y=g(t,s)$, se obţine egalitatea

$$h(t,s)=z[f(t,s),\ g(t,s)]$$

care, derivată în raport cu s şi t, arată că

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial s}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial t}. \qquad (1.32')$$

În plus, din sistemul caracteristic se deduce

$$\frac{\partial h}{\partial t} = p\frac{\partial f}{\partial t} + q\frac{\partial g}{\partial t}; \qquad (1.32'')$$

interpretînd cele patru egalităţi (1.32), (1.32'), (1.32'') ca un sistem algebric avînd necunoscutele $p, q, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, cum determinantul

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial g}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial s} & \frac{\partial g}{\partial s} \end{vmatrix} \neq 0,$$

în baza lui (1.28), soluţiile vor coincide două cîte două; avem

$$p(s, t) = \frac{\partial z[f(s, t), g(s, t)]}{\partial x}, \quad q(s, t) = \frac{\partial z[f(s, t), g(s, t)]}{\partial y},$$

ceea ce înseamnă

$$p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \quad q(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}.$$

Astfel, s-a arătat că z definit prin (1.30') verifică ecuaţia $F=0$ şi sînt verificate şi condiţiile iniţiale, deoarece

$$z(x_0, y_0) = z[x(0, s), y(0, s)] = z[f(0, s), g(0, s)] = h(0, s) = z_0(s),$$

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = p(x_0, y_0) = p[x(0, s), y(0,s)] = p_0(s),$$

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = q(x_0, y_0) = q_0(s),$$

1.5.6. **Unicitatea soluţiei problemei Cauchy**

Unicitatea acestei soluţii se poate deduce din teorema 1.4 în modul următor. Vom presupune iniţial curba γ avînd ecuaţiile

$$x = 0, y = y_0(s), z = z_0(s), \qquad (1.32)$$

ceea ce antrenează $y'(s) \neq 0$ şi $P \neq 0$ [din (1.28)]; cum $P = \frac{\partial F}{\partial p}$, ipoteza $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$ permite explicitarea lui p din ecuaţia $F(x, y, z, p, q) = 0$:

$$p = f(x, y, z, q), \qquad (1.33)$$

căreia i se va ataşa condiţia Cauchy

$$z(x, y)|_{x=0} = g(y), \qquad (1.32')$$

unde g se deduce prin eliminarea lui s din (1.32). Consideraţiile din 1.5.5 conduc la posibilitatea construirii a cel puţin unei soluţii pentru ecuaţia (1.33) care verifică (1.32'); această soluţie este unică. Într-adevăr, dacă ar exista două soluţii z_1 şi z_2 astfel încît

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = f\left(x, y, z_1, \frac{\partial z_1}{\partial y}\right), \quad z_1\Big|_{x=0} = g(y),$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} = f\left(x, y, z_2, \frac{\partial z_2}{\partial y}\right), \quad z_2\Big|_{x=0} = g(y),$$

notînd $u = z_1 - z_2$, se deduce $u|_{x=0} = 0$ şi prin aplicarea teoremei creşterilor finite

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f\left(x, y, z_1, \frac{\partial z_1}{\partial y}\right) - f\left(x, y, z_2, \frac{\partial z_2}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 (z_1 - z_2) + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_1 \left(\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{\partial z_2}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1 u + \left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_1 \frac{\partial u}{\partial y};$$

dacă $f \in C^1$, rezultă

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant B\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| + M|u|.$$

Comparînd cu datele teoremei 1.4, rezultă $A=0$, $N=0$, ceea ce înseamnă $|u|=0$; de aici se deduce $z_1=z_2$ (în vecinătatea lui γ).

Dacă γ este definit prin ecuaţiile $x=x_0(s)$, $y=y_0(s)$, $z=z_0(s)$ printr-o schimbare a parametrului, se poate presupune γ dată prin $y=\varphi(x)$, $z=z(x)$; efectuînd schimbarea de variabile

$$\bar{x}=y-\varphi(x),\quad \bar{y}=\bar{y}(x,y),$$

vom presupune $\bar{x}$ şi $\bar{y}$ ca fiind noi variabile independente; în aceste variable, curba γ va fi caracterizată prin $\bar{x}=0$, ceea ce face să ne situăm în cazul precedent. Deoarece funcţia necunoscută va depinde de $\bar{x}$ şi $\bar{y}$, iar cum

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}=\bar{p}(-\varphi')+\bar{q}\bar{y}_x,$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial y}=\bar{p}+\bar{q}\bar{y}_y,$$

ecuaţia $F(x,y,z,p,q)=0$ va deveni

$$F[x(\bar{x},\bar{y}),\,y(\bar{x},\bar{y}),\,z(\bar{x},\bar{y}),\,-\varphi'\bar{p}+\bar{q}\bar{y}_x,\,\bar{p}+\bar{q}\bar{y}_y]=0;$$

pentru a se putea aplica raţionamentul anterior, va trebui explicitat $\bar{p}$, adică va trebui să presupunem $\frac{\partial F}{\partial \bar{p}}\neq 0$; se deduce condiţia

$$-\varphi'\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial q}\neq 0 \text{ sau } \varphi' P-Q\neq 0,$$

care coincide cu (1.28). Prin urmare, cel puţin local, soluţiile obţinute la 1.5.5. sînt unic determinate.

Unicitatea soluţiei problemei Cauchy se poate demonstra utilizînd unicitatea soluţiilor (în condiţii iniţiale date) sistemul caracteristic (1.25'').

Teorema de unicitate permite să afirmăm că pentru o curbă iniţială dată γ [care verifică condiţia (1.28)] soluţia este unic determinată de-a lungul ei; teorema de existenţă asigură existenţa unei soluţii în vecinătatea oricărui punct al lui γ iar aceste soluţii locale determină o singură soluţie globală (dacă două soluţii locale nu s-ar prelungi una pe cealaltă, atunci într-o vecinătate dată a unui punct al lui γ ar exista două soluţii a aceleiaşi probleme Cauchy).

1.6. Ecuaţia generală neliniară cu derivate parţiale de ordinul întii

Ecuaţia generală cu derivate parţiale de ordinul întii, pentru funcţia necunoscută $z=u(\mathbf{x})$, $u:D_n\to\mathbb{R}$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $D_n\subset\mathbb{R}^n$, se scrie

$$F(\mathbf{x},z,\mathbf{p})=0 \tag{1.34}$$

sau, explicit

$$F(x_1,\ldots,x_n,z,p_1,\ldots,p_n)=0 \tag{1.34'}$$

$\left(\text{utilizînd notaţiile lui Monge } p_j=\frac{\partial u}{\partial x_j},\ j=1,2,\ldots,n\right)$, D_n fiind un domeniu.

Se presupune $F:D_n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, de o clasă $m\,(m\geqslant 2)$ iar prin soluţie în D_n a ecuaţiei (1.34) se va înţelege orice funcţie $u\in C^1(D_n)$, astfel încît

$$F\left[x_1,\ldots,x_n,u(x_1,\ldots,x_n),\frac{\partial u(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x}\right]=0,\quad \mathbf{x}\in D_n.$$

Din punct de vedere geometric, notînd $z=u(\mathbf{x})$, în spaţiul $\mathbb{R}^{n+1}=\{x_1,\ldots,x_n,z\}$ această soluţie va defini o suprafaţă n-dimensională.

Teoria expusă la 1.5 pentru $n=2$ se extinde punct cu punct la cazul $n>2$; sistemul caracteristic al ecuaţiei (1.34) va fi

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}=P_j(x,z,p),\quad j=1,2,\ldots,n,$$

$$\frac{dz}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{n}P_j(x,z,p)\,p_j, \tag{1.35}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t}=-X_j-p_j\,Z,\quad j=1,2,\ldots,n,$$

cu notaţiile

$$X_j=\frac{\partial F}{\partial x_j},\quad Z=\frac{\partial F}{\partial z},\quad P_j=\frac{\partial F}{\partial p_j},\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Sistemul (1.35) este autonom şi are $2n+1$ ecuaţii; soluţiile

$$x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t), \quad z = z(t), \quad t \in I,$$

se numesc *caracteristice* pentru ecuaţia (1.34) iar soluţiile

$$x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t), z = z(t), p_1 = p_1(t), \ldots, p_n = p_n(t), \quad t \in I,$$

definesc *benzile caracteristice* ale ecuaţiei considerate.

Funcţia $F = F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$ va fi o integrală primă pentru sistemul caracteristic (1.35), deoarece

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$$

dacă se utilizează şi ecuaţiile sistemului caracteristic; aşadar, dacă o soluţie oarecare a sistemului (1.35) verifică ecuaţia $F=0$ pentru o valoare $t = t_0 \in I$, vom avea $F=0$ pentru orice $t \in I$; de asemenea, orice bandă caracteristică a ecuaţiei (1.34) care are un punct comun cu o suprafaţă integrală S este conţinută în S.

Conul lui Monge, cu vîrful în $(\mathbf{x}^0, z^0)$, $\mathbf{x}^0 \in D_n$, ataşat ecuaţiei (1.34), se obţine prin eliminarea parametrilor $p_1, \ldots, p_n$ între egalităţile

$$F(\mathbf{x}^0, z^0, \mathbf{p}) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0)\, p_j = z - z^0, \quad \frac{x_1 - x_1^0}{P_1} = \ldots = \frac{x_n - x_n^0}{P_n}$$

iar *conoidul caracteristic* al aceleiaşi ecuaţii avînd vîrful în $(\mathbf{x}^0, z^0)$ este suprafaţa din $\mathbb{R}^{n+1}$ obţinută cu ajutorul caracteristicilor ecuaţiei (1.34) care trec prin punctul $(x_1^0, \ldots, x_n^0, z^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Problema Cauchy ataşată ecuaţiei (1.34) solicită determinarea unei suprafeţe integrale S a acestei ecuaţii care trece printr-o suprafaţă S_0 dată din $\mathbb{R}^{n+1}$ (numită *suprafaţă iniţială*) de dimensiune $n-1$; cu alte cuvinte, condiţia iniţială $z|_{S_0} = u^0(\mathbf{x})$, $S_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dacă S_0 este reprezentată parametric prin

$$x_1 = x_1^0(s_1, \ldots, s_{n-1}), \ldots, x_n = x_n^0(s_1, \ldots, s_{n-1}), \quad z = z^0(s_1, \ldots, s_{n-1}), \quad (1.36)$$

$s = (s_1, \ldots, s_{n-1}) \in G_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ şi dacă S este definită prin $z = u(x_1, \ldots, x_n)$, va trebui să avem

$$z_0(\mathbf{s}) = u[x_1^0(\mathbf{s}), \ldots, x_n^0(\mathbf{s})] = u^0[\mathbf{x}(\mathbf{s})].$$

Pentru construcţia efectivă a acestei soluţii se urmează calea indicată în 1.1.5; astfel, împreună cu (1.36) se determină şi $p_1^0, \ldots, p_n^0$ astfel încît p_j^0 să depindă de $s_1, \ldots, s_{n-1}$ şi să verifice atît egalitatea $F(\mathbf{x}^0, z^0, \mathbf{p}^0) = 0$ cît şi condiţia de ortogonalitate dintre planul lui $\mathbb{R}^{n+1}$, avînd parametrii directori $(p_1^0, \ldots, p_n^0, -1)$ şi suprafaţa (1.36). Se integrează apoi sistemul caracteristic (1.35) în ipoteza că datele iniţiale sînt

$$x_j(t) = x_j^0(s), \; z(t) = z^0(s), \; p_j(t) = p_j^0(s), \text{ pentru } t = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

iar funcţiile

$$x_j = f_j(t, s_1, \ldots, s_{n-1}), \quad z = f(t, s_1, \ldots, s_{n-1}) \; j = 1, 2, \ldots, n, \quad (1.37)$$

dau reprezentarea parametrică a soluţiei căutate, în vecinătatea fiecărui punct al suprafeţei iniţiale S_0. Funcţiile (1.37) sînt unic determinate dacă

$$\begin{vmatrix} P_1 & \frac{\partial x_1^0}{\partial s_1} & \ldots & \frac{\partial x_1^0}{\partial s_{n-1}} \\ P_2 & \frac{\partial x_2^0}{\partial s_1} & \ldots & \frac{\partial x_0^2}{\partial s_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_n & \frac{\partial x_n^0}{\partial s_1} & \ldots & \frac{\partial x_n^0}{\partial s_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

în fiecare punct al lui S_0 (aici $P_j = P_j[\mathbf{x}^0(\mathbf{s}), z^0(\mathbf{s}), \mathbf{p}^0(\mathbf{s})]$, $j = 1, 2, \ldots, n$).

Deoarece $\dfrac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t, s_1, \ldots, s_{n-1})} \neq 0$ pentru t suficient de mic, din primele n egalităţi (1.37) se exprimă (conform cu teorema funcţiilor implicite) variabilele $t, s_1, \ldots, s_{n-1}$ cu ajutorul variabilelor $x_1, \ldots, x_n$:

$$t = t(x_1, \ldots, x_n), \; s_1 = s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_{n-1} = s_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$$

iar soluţia în cauză va fi

$$z = f[t(x_1, \ldots, x_n), s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)] =$$

$$= u(x_1, \ldots, x_n).$$

Ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul întîi intervin frecvent în practică, fie sub forma generală (1.34), fie sub diverse forme mai simple; una din aceste forme este așa-numita *ecuație Hamilton-Jacobi*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(t, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{1.38}$$

care se caracterizează prin aceea că u nu apare direct ci numai prin intermediul derivatelor parțiale, ceea ce are drept consecință faptul că, odată cu u și $u+c$, va fi o soluție pentru orice $c \in \mathbb{R}$ iar ecuația este direct explicitată în raport cu una din derivatele parțiale. Acest tip de ecuații cu derivate parțiale va fi întîlnit și studiat în cap. 2; mai facem observația că ecuațiile caracteristice pentru ecuația Hamilton-Jacobi (1.38) au o formă mai simplă și mai simetrică (cu s variabilă independentă)

$$\frac{dt}{ds} = 1; \quad \frac{dx_j}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{du}{ds} = p\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial H}{\partial p_j},$$

$$\frac{dp}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \frac{dp_j}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

din care se deduce, de exemplu, $s = t$.

Exemple. 16. Ecuația (cu f o funcție de clasă ≥ 2)

$$z = px + qy + f(p, q),$$

în care deci $F = z - px - qy - f(p, q)$, se numește *ecuația Clairaut generalizată* (cu două variabile independente); sistemul caracteristic va fi

$$\frac{dx}{dt} = -x - \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = -y - \frac{\partial f}{\partial q},$$

$$\frac{dz}{dt} = -px - qy - p\frac{\partial f}{\partial p} - q\frac{\partial f}{\partial q},$$

$$\frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{dq}{dt} = 0$$

și se va integra ușor; găsim

$$x = \left[x_0 + \frac{\partial f(p_0, q_0)}{\partial p}\right] \exp(-t) - \frac{\partial f(p_0, q_0)}{\partial p},$$

$$y = \left[y_0 + \frac{\partial f(p_0, q_0)}{\partial q}\right] \exp(-t) - \frac{\partial f(p_0, q_0)}{\partial q},$$

$$z = \left[p_0 x_0 + q_0 y_0 + p_0 \frac{\partial f(p_0, q_0)}{\partial p} + q_0 \frac{\partial f(p_0, q_0)}{\partial q}\right] \exp(-t) + z_0 -$$

$$- p_0 x_0 - q_0 y_0 - p_0 \frac{\partial f(p_0, q_0)}{\partial p} - q_0 \frac{\partial f(p_0, q_0)}{\partial q},$$

$$p = p_0, \quad q = q_0.$$

În particular, dacă $f(p, q) = pq$, se găsește

$$x = (x_0 + q_0)\,e^{-t} - q_0, \quad y = (y_0 + p_0)\,e^{-t} - p_0, \quad p = p_0, \ q = q_0,$$

$$z = (x_0 p_0 + y_0 q_0 + 2p_0 q_0)e^{-t} + z_0 - x_0 p_0 - y_0 q_0 - 2p_0 q_0,$$

iar dacă este necesară rezolvarea problemei Cauchy: pentru $x=0$ să avem $z=e^y$ [sau, ceea ce este același lucru, curba inițială să aibă ecuațiile $x=0$, $y=s$, $z=\exp(s)$], se obține ușor reprezentarea parametrică a soluției

$$x = e^{s-t} - e^{-s}, \ y = e^{-t} + s - 1, \ z = (2 - s)e^{s-t} + e^s(s - 1),$$

deoarece $p_0 = 1 - s$, $q_0 = \exp(s)$, după cum rezultă din sistemul

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0, \ z'_0(s) = p_0 x'_0 + q_0 y'_0.$$

17. *Ecuația Clairaut generalizată în n variabile* este

$$z = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n + f(p_1, \ldots, p_n),$$

cu notațiile lui Monge, $p_j = \dfrac{\partial z}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, și f o funcție dată; sistemul caracteristic fiind

$$\frac{dx_j}{dt} = -x_j - \frac{\partial f}{\partial p_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\frac{dz}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} x_j p_j - \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial f}{\partial p_j},$$

$$\frac{dp_j}{dt} = 0, \qquad j = 1,2,\ldots,n,$$

se integrează imediat deoarece $p_1 = p_1^0, \ldots, p_n = p_n^0$.

18. Ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul întîi de forma

$$F\left(z-\sum_{j=1}^{n} x_j p_j, p_1, \ldots, p_n\right)=0$$

în ipoteza că $z-\sum_{j=1}^{n} x_j p_j$ apare efectiv în această ecuație, este echivalentă cu una sau mai multe ecuații de tip Clairaut generalizată, deoarece prin aplicarea teoremei funcțiilor implicite, se deduce

$$z-\sum_{j=1}^{n} x_j p_j = f(p_1, \ldots, p_n).$$

Aceste ecuații au particularitatea următoare: conul lui Monge și conoidul caracteristic coincid (acolo unde ele există), fapt care se poate verifica luînd în considerație relațiile care conduc la aceste varietăți.

Exerciții

1°. Să se rezolve problemele Cauchy care apar în dreptul fiecărei ecuații:

a) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+zy\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy, \quad y=a, \quad z^2+x^2=a^2;$

b) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+xy\dfrac{\partial u}{\partial z}=(x+y+xy)\exp(x+y+z), \quad u=\exp(x+z)$ pentru $y=0;$

c) $x\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+y\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+z\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2=2(x^2+y^2+z^2), \quad u=x^2+y^2$ pentru $z=0;$

d) $x^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+y^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=xy, \quad u=\sqrt{x}$ pentru $y=1;$

e) $(2e^y-x)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0, \quad z=x$ pentru $y=0.$

R. a) $z^2=2y^2-x^2-a^2$; b) $u=e^{x+y+z}$; c) $u=x^2+y^2+z^2$; d) $u=\sqrt{xy}$; e) $z=xe^y-e^{2y}+1$.

2°. Să se determine conul lui Monge și conoidul caracteristic pentru ecuațiile:

a) $pq=1$; b) $\sqrt{p}+\sqrt{q}=1$; c) $p_1p_2p_3=1$.

R. a) Conul lui Monge: $4(x-x_0)(y-y_0)=(z-z_0)^2$.
Conoidul caracteristic: $4(x-x_0)(y-y_0)=(z-z_0)^2$.

b) Conul lui Monge: $\dfrac{x-x_0}{y-y_0}+\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{2(z-z_0)}{x-x_0+y-y_0}.$

Conoidul caracteristic:

$$(x-x_0)(y-y_0)=(y-y_0)(z-z_0)+(x-x_0)(z-z_0).$$

c) Conul lui Monge:

$$27(x_1-x_1^0)(x_2-x_2^0)(x_3-x_3^0)=(z-z_0)^3.$$

Conoidul caracteristic va coincide cu conul lui Monge.

CAPITOLUL 2

Ecuația lui Bellman și ecuația Hamilton-Jacobi

2.1. Problema controlului

2.1.1. Noțiuni generale

În problemele care vor fi tratate în acest capitol, variabila independentă t va avea semnificație de timp și se va presupune $t\in[t_0, t_1]$, unde $-\infty<t_0<t_1<+\infty$; vor apărea două grupuri de funcții: $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ numite *variabile de stare* (sau *de fază*) și $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ numite *variabile de control*. În problemele de control apar unele elemente caracteristice și anume:

a) Funcționale avînd fie forma

$$J_1[\mathbf{x}, \mathbf{u}]=\int_{t_0}^{t_1} f_0[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)]\,dt \tag{2.1}$$

(unde $f_0:[t_0, t_1]\times\mathbb{R}^{2n+m}\to\mathbb{R}$ se numește *integrand*), numite *funcționale de tip integral*, fie forma

$$J_2[\mathbf{x}]=\psi[t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1)] \tag{2.1'}$$

(unde $\psi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$) care se numește *funcțională de tip terminal*, fie forma

$$J_3[\mathbf{x}, \mathbf{u}]=J_1[\mathbf{x}, \mathbf{u}]+J_2[\mathbf{x}] \tag{2.1''}$$

care este deci o *funcțională de tip mixt*, J_1 și J_2 fiind definite prin (2.1), respectiv (2.1').

b) Restricţii asupra variabilelor de stare şi variabilelor de control, care pot fi scrise fie sub formă de egalităţi şi inegalităţi

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{G}_1[t,\ \mathbf{x}(t),\ \dot{\mathbf{x}}(t),\ \mathbf{u}(t)] = 0\\ \mathbf{G}_2[t,\ \mathbf{x}(t),\ \dot{\mathbf{x}}(t),\ \mathbf{u}(t)] \leqslant 0\end{array}\right\} \qquad (2.2)$$

cu $\mathbf{G}_j : [t_0, t_1]\times\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{k_j}$, $j = 1, 2$, fie sub forma

$$\mathbf{u}\in U \subset \mathbb{R}^m, \qquad \forall t\in I\subset[t_0, t_1], \qquad (2.2')$$

[în particular, dacă în (2.2) nu intervin $\dot{\mathbf{x}}$ şi $\mathbf{u}$, acestea se numesc *restricţii în stare*].

Dacă, în particular, restricţiile $G_1[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)\ \ \mathbf{u}(t)] = 0$ din (2.2) apar sub forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \qquad (2.3)$$

cu $f : [t_1, t_2]\times\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^n$, le vom numi *restricţii sub formă normală*.

Dacă în (2.3) $\mathbf{u}$ este cunoscut, se pune în evidenţă un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întii : orice soluţie a acestui sistem, corespunzînd variabilelor de control $\mathbf{u}$, se numeşte *traiectorie* (în spaţiul fazelor) iar perechea $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, pusă în legătură cu sistemul (2.3) ($\mathbf{x}$ este soluţia corespunzătoare unui $\mathbf{u}$ dat), se numeşte *control*.

c) Condiţii la limită care se impun variabilelor de stare la capetele intervalului $[t_0, t_1]$, deci se referă la variabilele t_0 şi $\mathbf{x}(t_0)$ ca şi la variabilele t_1 şi $\mathbf{x}(t_1)$; condiţiile la limită pot fi cu capete fixe [deci dacă $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ şi $\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}^1$], periodice (dacă intervalul $[t_0, t_1]$ este fix iar $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_1)$ sau cu un capăt liber (celălalt fiind fixat) cînd nu apar condiţii la limită la unul din capetele traiectoriei. Aceste condiţii la limită se vor nota prin Γ (evident $\Gamma \subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$).

Prin problemă de control optimal se înţelege determinarea vectorilor variabili $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{u}$ astfel încît $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ să verifice condiţiile

$$J[\mathbf{x}, \mathbf{u}] \to \inf\,(\sup), \qquad (2.4)$$

$$\mathbf{G}_1[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)] = 0, \quad \mathbf{G}_2[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)]\leqslant 0, \qquad (2.5)$$

$$\mathbf{u}(t) \in U(t), \qquad (2.6)$$

$$(t_0, \mathbf{x}(t_0),\ t_1, \mathbf{x}(t_1)) \in \Gamma. \qquad (2.7)$$

Dacă funcţionala (2.4) este de tip integral [deci de forma (2.1)], problema de control optimal se numeşte *problemă Lagrange*, dacă funcţionala (2.4) este de tip terminal, problema de control optimal se

numeşte *problemă Mayer* iar dacă funcţionala (2.4) este de tip mixt, problema (2.4)—(2.7) se numeşte *problemă Bolza.*

Intervalul $[t_0, t_1]$ de variaţie al variabilei independente t poate fi fixat (cînd problema de optim se numeşte problemă cu timp fix) sau nu.

Funcţiile $x_1,\ldots, x_n$ se presupun derivabile pe porţiuni iar variabilele de control $u_1,\ldots, u_m$ se presupun continue pe porţiuni.

2.1.2. Exemple de probleme cu control

a) Fie un punct material în mişcare rectilinie cu masa unitate ; se cere să se comande forţa u care trebuie aplicată acestui punct, pentru ca acesta să ajungă în timp minim într-un punct dat, ştiind că asupra forţei u este impusă restricţia $|u| \leqslant 1$ şi cunoscîndu-se totodată poziţia şi viteza iniţială.

Ecuaţia de mişcare fiind $\ddot{x} = u$, punind $x = x_1, \dot{x}_1 = x_2$, se deduce sistemul autonom

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = u.$$

În spaţiul fazelor (x_1, x_2), această problemă revine la determinarea lui u, dacă $|u| \leqslant 1$, astfel încît traiectoria corespunzătoare care are originea într-un punct (x_1^0, x_2^0) şi cealaltă extremitate într-un punct dat [care poate fi chiar originea (0, 0)] să corespundă timpului minim în care se ajunge din (x_1^0, x_2^0) şi (0, 0).

Este uşor de verificat faptul că problema în cuză (numită *problema de sinteză*) este un caz particular al problemei (2.4) — (2.7), în care $t_0 = 0$, $t_1 = t$, $J[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = t = \int_0^t 1\ \mathrm{d}t$ (deci $f_0 = 1$), $\mathbf{G}_2 = 0$, $\mathbf{G}_1$ este astfel incît conduce la sistemul diferenţial $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u$, $U = \{u \mid -1 \leqslant u \leqslant +1\}$ (deci U este un interval) iar condiţiile la limită Γ sînt astfel încît $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$ şi $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0$.

b) *Problema rachetei în consum optim* revine la determinarea vitezei de ardere a combustibilului şi a unghiului de atac, astfel incît, plecind dintr-un punct dat, racheta să ajungă într-un alt punct bine precizat, cu un consum minim.

Dacă se notează prin $a = a(t)$ viteza de ardere a combustibilului şi cu $m = m(t)$ masa rachetei la momentul t, avem $m(t)$ = masa combustibilului + masa M a rachetei şi deci $m(t) \geqslant M$ iar $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -a$; ecuaţia de mişcare a rachetei va fi

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}'}{m}\, a$$

dacă $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{v}'$ sînt vitezele rachetei la momentele t şi t' $(t' = t + \Delta t)$ iar $\mathbf{F}$ este rezultanta forţelor exterioare (raportate la masa unitate).

Notind cu ω unghiul de atac, se obţine, din ecuaţia anterioară, sistemul

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = F_1 - \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{m}\, a\cos\omega, \quad \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = F_2 - \frac{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}{m}\, a\sin\omega$$

(considerînd un sistem de axe dintr-un plan care trece prin punctele în cauză), la care se atașează condițiile inițiale $v_1(0) = v_1^0$, $v_2(0) = v_2^0$. Notînd cu t_0 *momentul inițial al mișcării*, cu t_1 momentul final al aceleiași mișcări, cu m_0 și m_1 masa inițială, respectiv finală a rachetei, se obține egalitatea

$$m_1 = m_0 - \int_{t_0}^{t_1} a(t)\, \mathrm{d}t$$

și deci cantitatea de combustibil consumată va fi egală cu $m_0 - m_1$. Problema impune să fie verificată inegalitățile

$$0 \leqslant a_0 \leqslant a(t) \leqslant a_1, \qquad \omega_0 \leqslant \omega(t) \leqslant \omega_1,$$

$a_0, a_1, \omega_0, \omega_1 \in \mathbb{R}$, ceea ce arată că dacă notăm $\mathbf{u} = (a, \omega)$ și $J = \int_{t_0}^{t_1} a(t)\, \mathrm{d}t$, se obține o problemă de control optimal; această problemă are o importanță practică deosebită, deoarece este știut că o rachetă nu poate avea o masă oricît de mare ca să se poată utiliza oricît de mult combustibil iar un consum redus de combustibil este scopul major al oricărei cercetări.

c) În cazul unor situații de producție planificată apar probleme de control; astfel, dacă $[t_0, t_1]$ este un interval fixat de timp, notînd cu $x = x(t)$ un stoc de marfă la momentul $t \in [t_0, t_1]$, cu $c = c(t) \geqslant 0$ cererea pentru marfa în cauză la momentul t, cu $u = u(t)$ producția de marfă la momentul t (care poate fi controlată), dacă x_0 este stocul inițial de marfă, funcția x va verifica

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -c(t) + u(t), \; x(t_0) = x_0 > 0,$$

iar u trebuie ales, evident, astfel ca $x(t) \geqslant 0$, $t \in [t_0, t_1]$ în ipoteza

$$0 \leqslant u(t) \leqslant u_0, \qquad t \in [t_0, t_1],$$

unde u_0 reprezintă maximul pe care-l poate atinge producția în cauză. Presupunînd costul producției pe unitatea de timp o funcție f, avem $f = f[t, x(t), u(t)]$, costul total va fi

$$C[u] = \int_{t_0}^{t_1} f[t, x(t), u(t)]\, \mathrm{d}t$$

iar problema de control care apare în mod natural este aceea a determinării lui u pentru minimizarea costului total. Este evident că acest tip de problemă se încadrează în cea descrisă la 2.1.1.

2.1.3. Programare dinamică

Prin *programare dinamică* se înțelege o metodă generală de rezolvare a unor probleme de optim; această metodă a fost elaborată și aplicată în diverse situații concrete de către inginerul american

R. Bellman. Vom exemplifica această metodă luînd în considerare o problemă de control optimal, așa cum a fost formulată la 2.1.1, cu mențiunea că metoda este aplicabilă și altor situații; programarea dinamică are la bază un principiu de optim postulat de Bellman, care

Fig. 2.1.

redus la cea mai simplă expresie, se formulează astfel: „*Comportarea unui anumit sistem în viitor depinde numai de starea lui actuală*" (deci nu depinde de comportarea în trecut a sistemului).

Pentru a înțelege mai bine acest principiu, vom considera fig. 2.1, în care AB este o traiectorie optimală din spațiul fazelor, adică în anumite condiții restrictive funcțiile $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ vor realiza minimul unei funcționale J date (pe care o vom presupune de tip integral); pentru precizare, vom presupune că acest optim este un minim. Traiectoria AB poate fi considerată ca fiind reuniunea arcelor AC și CB, punctele A, B și C obținîndu-se pentru valorile $t = t_0$, $t = t_1$ și $t = t' \in]t_0, t_1[$ înlocuite în $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$.

Principiul de optim al lui Bellman afirmă că dacă arcul AB este o traiectorie optimală, atunci și arcul CB este de asemenea o traiectorie optimală (pentru problema în cauză); dacă n-ar fi așa, ar însemna că, dacă de exemplu arcul CB_1 ar fi optimal, funcționala J ar avea pe traiectoria $AC \cup CB_1$ o valoare mai mică decît pe traiectoria $AC \cup CB$ (deoarece $J|_{CB} > J|_{CB_1}$), ceea ce contrazice ipoteza de optimalitate a traiectoriei ACB. Această contradicție arată că arcul CB al traiectoriei AB reprezintă în mod obligatoriu o traiectorie optimă (pentru intervalul $[t_1', t_1)$] a problemei considerate, chiar dacă pe arcul AC se realizează sau nu optimul funcționalei J (pentru intervalul de timp $[t_0, t']$).

Acest principiu de optim se referă la acea stare a unui sistem considerat, care succede unei anumite stări date; este posibil ca pentru o stare anterioară stării actuale, acest principiu să nu mai fie valabil; de exemplu, cum se cunoaște doar $\mathbf{x}(t_0)$, nu și $\mathbf{x}(t')$, nu se poate afirma că arcul AC al traiectoriei va fi o traiectorie optimală.

La prima vedere, acest principiu pare banal, dar aplicarea lui conduce la concluzii deloc banale; în plus, chiar principiul însuși este departe de a fi elementar. De exemplu, afirmația „*Un arc oarecare*

al unei traiectorii optimale este de asemenea o traiectorie optimală" nu este întotdeauna valabilă, după cum s-a arătat mai sus.

2.1.4. Ecuația lui Bellman

Vom utiliza considerațiile din 2.1.3 pentru a deduce o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi, care se poate atașa unor probleme de control optimal. Vom presupune că s-a determinat $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, care definește o traiectorie optimală în spațiul fazelor a unei anumite probleme de control; dacă $t\in]t_0, t_1[$, arcul C_tB al traiectoriei optimale AB $[A=\mathbf{x}(t_0),\ B=\mathbf{x}(t_1),\ C=\mathbf{x}(t)]$ va fi de asemenea o traiectorie optimală, ca și arcul $C_{t'}B$ și $t'=t+h$, al aceleiași traiectorii. De aceea, dacă se notează

$$S(t, \mathbf{x}) = S[t, \mathbf{x}(t)] = \inf_{\mathbf{u}\in U} J[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \min_{\mathbf{u}\in U}\int_{t}^{t_1} f_0[s, \mathbf{x}(s),\ \mathbf{u}(s)]\,\mathrm{d}s, \quad (2.8)$$

va rezulta

$$S(t', \mathbf{x}') = S[t', \mathbf{x}(t')] = \inf_{\mathbf{u}\in U}\int_{t'}^{t_1} f_0[s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)]\,\mathrm{d}s\,;$$

prin urmare, deoarece

$$\int_t^{t_1} f_0[s, \mathbf{x}(s),\ \mathbf{u}(s)]\,\mathrm{d}s = \int_t^{t'} f_0[s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)]\,\mathrm{d}s + \int_{t'}^{t_1} f_0[s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)]\,\mathrm{d}s,$$

se poate scrie

$$S(t, \mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}\in U}\left(\int_t^{t+h} f_0[s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)]\,\mathrm{d}s + \min_{\mathbf{u}\in U}\int_{t'}^{t} f_0[s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)]\,\mathrm{d}s\right)\cdot \quad (2.8')$$

În ipoteza că f_0 este continuă, avem

$$\int_t^{t+h} f_0[s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)]\,\mathrm{d}s = f_0[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]\,h + O(h)$$

iar din (2.8') se va deduce

$$S(t, \mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}\in U}\ [f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})h + S(t', \mathbf{x}') + O(h)]. \quad (2.8'')$$

Presupunînd $\mathbf{x}\in C^2$, avem, în ipoteza $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$,

$\mathbf{x}' = \mathbf{x}(t') = \mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + h\mathbf{x}'(t) + O(h^2) = \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + O(h^2)$

iar dacă S este o funcție diferențiabilă în argumentele ei, se poate scrie

$$S(t', \mathbf{x}') = S[t+h, \mathbf{x}(t+h)] = S[t+h, \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + O(h^2)] =$$

$$= S(t, \mathbf{x}) + h\frac{\partial S(t, \mathbf{x})}{\partial t} + h\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial S(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} f_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \alpha(h) =$$

$$= S(t, \mathbf{x}) + h\frac{\partial S(t, \mathbf{x})}{\partial t} + (\nabla_{\mathbf{x}}\ S, \mathbf{f})\,h + \alpha(h)$$

cu notația $\nabla_{\mathbf{x}} S = \mathrm{grad}_{\mathbf{x}}\ S = \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_n}\right)$, α avînd proprietatea $\lim\limits_{h\to 0}\frac{|\alpha|}{h} = 0$; înlocuind $S(t', \mathbf{x}')$ în (2.8''), deoarece $S(t, \mathbf{x})$ și $\frac{\partial S(t, \mathbf{x})}{\partial t}h$ nu depind de $\mathbf{u}$, se ajunge la egalitatea $S(t, \mathbf{x}) =$ $= S(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial S(t, \mathbf{x})}{\partial t}h + \inf\limits_{\mathbf{u}\in U}[f_0(t, \mathbf{x},\ \mathbf{u})\,h + (\nabla_{\mathbf{x}}\ S, \mathbf{f})\,h + \alpha(h)]$, care, după reducerea termenilor asemenea și după împărțirea la h, pentru $h\to 0$, conduce la ecuația lui Bellman

$$\frac{\partial S(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \inf_{\mathbf{u}\in U}[f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + (\nabla_{\mathbf{x}}\ S, \mathbf{f})] \quad (2.9)$$

sau, deoarece $(\nabla_{\mathbf{x}}S, \mathbf{f})$ este un produs scalar, această ecuație se mai scrie

$$-\frac{\partial S(t,\ \mathbf{x})}{\partial t} = \inf_{\mathbf{u}\in U}\left[f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial S(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} f_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\right]\cdot \quad (2.9')$$

Ecuația (2.9) este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi de o formă deosebită față de ecuațiile din cap. 1 și este verificată de funcțiile care minimizează funcționala de tip integral avînd pe f_0 ca integrand, variabilele $x_1, \ldots, x_n$ fiind soluții ale sistemului diferențial

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = f_j\,(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}),\ j = 1,2,\ldots, n.$$

Exemple. 1. Ecuaţia lui Bellman în cazul problemei de sinteză a) din 2.1.2 va fi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} - \frac{\partial S}{\partial x_2} + 1 = 0, \text{ dacă } \frac{\partial S}{\partial x_2} < 0$$

sau

$$\frac{\partial S}{\partial t} + x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} + 1 = 0, \text{ dacă } \frac{\partial S}{\partial x_2} > 0,$$

deoarece $f_1 = x_2$, $f_2 = u$, $f_0 = 1$ iar $\min\limits_{-1 \leqslant u \leqslant 1} \left[1 + x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} + u \frac{\partial S}{\partial u_2}\right]$ se obţine pentru $u = -1$ dacă $\frac{\partial S}{\partial x_2} > 0$ şi pentru $u = +1$ dacă $\frac{\partial S}{\partial x_2} < 0$.

2. Dacă este cazul problemei de control optimal

$$J[x_1, x_2] = \int_{t_0}^{t_1} F(x_1, x_2)\, \mathrm{d}t \to \inf,$$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = ux_1 + x_2, \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = u^2, \quad u \in [a, b],$$

se obţine

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \inf_{a \leqslant u \leqslant b} \left[F(x_1, x_2) + (ux_1 + x_2) \frac{\partial S}{\partial x_1} + u^2 \frac{\partial S}{\partial x_2}\right]$$

iar valoarea minimă a trinomului din paranteză se atinge pentru $u = \frac{x_1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial S}{\partial x_2}$ dacă $\frac{\partial S}{\partial x_2} > 0$ $\left(\text{dacă } \frac{\partial S}{\partial x_2} < 0, \text{ nu există valoare minimă pentru trinomul în discuţie}\right)$ iar ecuaţia Bellman va fi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{4} x_1^2 \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 \Big/ \frac{\partial S}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} = F(x_1, x_2).$$

2.1.5. Principiul de maxim al lui Pontreaghin

Luînd ca punct de plecare ecuaţia lui Bellman (2.9), se ţine seama de faptul că se poate scrie în locul acestei ecuaţii egalitatea

$$\sup_{\mathbf{u} \in U} \left[-f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} f_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \frac{\partial S(t, \mathbf{x})}{\partial t}\right] = 0;$$

introducînd vectorii $n+1$ dimensionali

$$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_n), \quad \mathbf{p} = \left(-1, \ -\frac{\partial S}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial S}{\partial x_n}\right), \tag{2.10}$$

ultima egalitate se poate scrie sub o formă mai condensată

$$\sup_{\mathbf{u} \in U} (\mathbf{f}, \mathbf{p}) = \frac{\partial S}{\partial t}, \text{ dacă } p_j = -\frac{\partial S}{\partial x_j}, \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.10'}$$

unde, ca de obicei, prin $(\mathbf{f}, \mathbf{p})$ se înţelege produsul scalar al vectorilor $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{p}$: $(\mathbf{f}, \mathbf{p}) = \sum\limits_{j=0}^{n} f_j p_j$.

Vom putea deduce principiul de maxim al lui Pontreaghin în ipoteza restrictivă $S \in C^2$; pentru aceasta se consideră funcţia $F = F(\mathbf{x})$ definită prin

$$F(\mathbf{x}) = \frac{\partial S(\tau, \mathbf{x})}{\partial t} + f_0(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S(\tau, \mathbf{x})}{\partial x_j} f_j(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{2.11}$$

unde $\tau \in]t_0, t_1[$ iar $\mathbf{u}$ este controlul optimal corespunzător problemei cu $t = \tau$ şi $\mathbf{x}(\tau)$ determinat; deoarece se presupune că toate consideraţiile din 2.1.4 s-au realizat în cazul unei traiectorii $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ optimale, pentru o astfel de traiectorie avem $F(\mathbf{x}) = 0$. Din ecuaţia lui Bellman (2.9′) se deduce min $F(\mathbf{x}) = 0$ şi deci pentru orice altă traiectorie avem $F(\mathbf{x}) \geqslant 0$; aceasta înseamnă că pentru $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, F îşi atinge valoarea minimă, ceea ce înseamnă $\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, adică

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t\, \partial x_k} + \frac{\partial f_0}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j\, \partial x_k} f_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = 0 \tag{2.11'}$$

(toate funcţiile fiind calculate pentru $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{u}$ care definesc o traiectorie optimală).

Să notăm $\varphi_k(t) = \frac{\partial S(t, \mathbf{x}(t))}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$; deoarece

$$\dot{\varphi}_k(t) = -\frac{\partial^2 S}{\partial x_k\, \partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_k\, \partial x_j} \dot{x}_j = -\frac{\partial^2 S}{\partial x_k\, \partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial x_k\, \partial x_j} f_j,$$

din (2.11) se deduc egalităţile

$$\dot{\varphi}_k(t) = -\frac{\partial f_0}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_k} =$$

$$= -\frac{\partial f_0}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(-\varphi_j) = -\frac{\partial f_0}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\varphi_j,$$

care arată că funcţiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ vor verifica sistemul diferenţial

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.12}$$

unde H este definit cu ajutorul produsului scalar al vectorilor (2.10)

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = (\mathbf{f}, \mathbf{p}) = \sum_{j=0}^{n} f_j p_j = -f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{j=1}^{n} f_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, p_j. \tag{2.13}$$

Deoarece se presupune că funcţiile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verifică sistemul diferenţial

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{2.12'}$$

şi deoarece se observă că $f_k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, din (2.12) şi (2.12′), cu ajutorul funcţiei H definite prin (2.12), se deduce sistemul diferenţial

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= \frac{\partial H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial p_k} \\ \frac{dp_k}{dt} &= -\frac{\partial H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial x_k} \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, n; \tag{2.14}$$

de asemenea, în notaţiile noastre, egalitatea (2.10′) se mai scrie

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sup_{\mathbf{u}\in U} H\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial S}{\partial x_j}\right)$$

cu $p_j = \dfrac{\partial S}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, iar în ipoteza că $\mathbf{u}$ este chiar comanda căutată, deci

$$\sup H\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial S}{\partial x_j}\right) = H\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial S}{\partial x_j}\right);$$

se ajunge la concluzia că pe traiectoria optimală trebuie să avem

$$H[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\varphi}(t)] = \sup_{\mathbf{u}\in U} H[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}(t)]. \tag{2.14'}$$

Relaţiile (2.14) şi (2.14′) constituie particularizarea principiului de maxim general demonstrat de L. S. Pontreaghin la cazul următoarei probleme de optim:

Să se determine soluţiile sistemului diferenţial

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

care verifică

$$x_j(t_0) = x_j^0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

şi care realizează un optim pentru funcţionala de tip integral

$$J_1[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int_{t_0}^{t_1} f_0[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]\, dt,$$

ştiind că $\mathbf{u} \in U$, mulţimea U a restricţiilor fiind definită în $\mathbb{R}^m$.

Această problemă se va rezolva astfel: se construieşte funcţia H (numită hamiltonian),

$$H = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{n} f_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\, p_j$$

pentru care se caută valoarea maximă în U, în ipoteza $\mathbf{u} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$; odată determinată această comandă $\mathbf{u}$, se calculează $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ în care vor rămîne necunoscute funcţiile $x_1, \ldots, x_n$, $u_1, \ldots, u_m$ care se determină prin integrarea sistemului diferenţial (1.14) format din $2n$ ecuaţii cu $2n$ necunoscute în condiţiile iniţiale date pentru $x_1, \ldots, x_n$ şi în condiţiile corespunzătoare pentru $p_j = \varphi_j$ deduse din problemă (ultimele condiţii sînt acelea care îngreunează acest algoritm simplu

și de aceea, în practică, aceste funcții se determină după un număr de încercări, pentru a se obține soluția optimă).

Principiul de maxim al lui Pontreaghin a fost dedus în condiții destul de restrictive pentru $f_0, f_1, \ldots, f_n$, $x_1, \ldots, x_n$, $u_1, \ldots, u_m$; demonstrația dată de Pontriaghin, care nu utilizează metodele programării dinamice, solicită condiții mult mai puțin restrictive: $f_0, f_1, \ldots, f_n$ sînt presupuse de clasă C^1, $x_1, \ldots, x_n$ sînt derivabile pe porțiuni pentru $t \in [t_0, t_1]$ iar $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sînt continue pe porțiuni în același interval.

Exemple. 3. Să presupunem că trebuie determinată comanda u, unde $|u| \leqslant A$, $A > 0$, astfel incit un punct material a cărui deplasare pe de o dreaptă este determinată de soluțiile ecuației diferențiale

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + b^2 x = u, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

să ajungă in timp minim din punctul x_0 din care pleacă cu viteza v_0, in origine cu viteza nulă.

Introducind in calcule spațiul fazelor și punind $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, rezultă sistemul

$$\dot{x}_1 = x_2, \; \dot{x}_2 = -2ax_2 - b^2 x_1 + u$$

care trebuie integrat in intervalul $[0, t]$, in condițiile $x_1(0) = x_0$, $\dot{x}_1(0) = x_2(0) = v_0$, $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0$, astfel incit $t = \min$.

Deoarece $t = \int_0^t 1 \cdot dt$, prin comparație cu problema standard, se deduce

$$f_0 = 1, \; f_1 = x_2, \; f_2 = -2ax_2 - b^2 x_1 + u.$$

Funcția hamiltoniană atașată acestui caz va fi

$$H(t, x_1, x_2, u, p_1, p_2) = f_0 - p_1 f_1 - p_2 f_2 = 1 - p_1 x_2 - (2a\, x_2 + b^2 x_1 - u)\, p_2,$$

care, fiind liniară in u, își va atinge valoarea maximă la capetele intervalului de variație pentru variabila de control u (deci valoarea maximă pentru H se obține pentru $u = +A$ dacă $p_2 > 0$ sau pentru $u = -A$ dacă $p_2 < 0$); așadar

$$u = A \operatorname{sgn} p_2.$$

Scriind sistemul diferențial liniar verificat de către funcțiile p_1 și p_2,

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial x} = -b^2 p_2, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 - 2a\, p_2,$$

prin eliminarea unei funcții necunoscute, se deduce că atît p_1 cit și p_2 verifică ecuația omogenă $\ddot{y} + 2a\dot{y} + b^2 y = 0$, deci, în ipoteza $|a| < |b|$

$$p_2(t) = c_1\, e^{-at} \sin\left(\sqrt{b^2 - a^2}\, t + c_2\right)$$

(p_1 nu ne interesează cit face efectiv, deoarece comanda u se determină numai cu ajutorul lui p_2); se deduce comanda căutată

$$u(t) = A \operatorname{sgn}\left[c_1\, e^{-at} \sin\left(\sqrt{b^2 - a^2}\, t + c_2\right)\right],$$

constantele c_1 și c_2 determinindu-se din condițiile impuse problemei (impunindu-se pentru p_1 și p_2 condițiile inițiale $p_1(0) = p_1^0$, $p_2(0) = p_2^0$).

4. Să considerăm un sistem a cărui comportare este descrisă prin soluțiile sistemului diferențial

$$\dot{x}_1 = x_2, \; \dot{x}_2 = -a\, x_2 + u, \; a > 0;$$

trebuie găsită comanda optimală u, care satisface $|u| \leqslant b$, $b > 0$ astfel încit obiectul în studiu să ajungă din poziția (x_1^0, x_2^0) în poziția (x_1^1, x_2^1) în timpul t_1 (fixat), iar integrala

$$J_1[u] = \int_0^{t_1} |u(s)|\, ds$$

să fie minimă.

Se obține deci funcția H definită prin

$$H(t, x_1, x_2, u, p_1, p_2) = |u| + p_1 x_2 + p_2(u - a\, x_2),$$

din care se deduce atît sistemul diferențial

$$\dot{p}_1 = 0, \; \dot{p}_2 = -p_1 + a\, p_2,$$

verificat de către funcțiile p_1 și p_2, cit și valorile lui u pentru care H își atinge valoarea maximă; rezultă $u = 0$ dacă $|p_2| < 1$ și $u = b \operatorname{sgn} p_2$ dacă $|p_2| \geqslant 1$. Valorile optime care interesează pot fi obținute prin rezolvarea numerică a ecuațiilor pentru x_1, x_2, p_1 și p_2 ținînd seama de condițiile impuse.

5. Dacă sistemul diferențial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ este liniar, de forma

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + u_j, \; x_j(t_0) = y_j^0, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

iar $|u_j| \leqslant A_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, și este vorba de determinarea timpului minim, se obține funcția hamiltoniană

$$H = 1 - \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k + u_j \right)$$

ale cărei valori maxime (în raport cu variabilele $u_1, u_2, \ldots, u_n$) se obțin pentru $u_j = A_j \operatorname{sgn} p_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$; sistemul diferențial pentru obținerea funcțiilor $p_1, p_2, \ldots, p_n$ va fi

$$\dot{p}_j = -\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, p_k, \; p_j(t_0) = p_j^0, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dacă $a_{jk} \in \mathbb{R}$, acest ultim sistem va avea soluțiile evasipolinoame, care fiind funcții olomorfe pe $\mathbb{R}$ ceea ce face ca $p_j(t)$ să nu-și poată schimba semnul decit de un număr finit de ori (aceste schimbări de semn arată că trebuie să trecem de la comenzile $\pm A_j$ la comenzile $\mp A_j$).

Fără a insista asupra demonstrației principiului de maxim (care a fost dedus anterior în condiții restrictive), vom da enunțul acestui principiu așa cum l-a prezentat L. S. Pontreaghin.

Se consideră sistemul autonom de ecuații diferențiale

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

cu $\mathbf{f} \in C^1(X \times \overline{U})$, unde $\overline{U}$ este închiderea mulțimii $U \subset \mathbb{R}^m$ iar $X \subset \mathbb{R}^n$; totodată se consideră și funcționala (de tip integral)

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]\,\mathrm{d}t$$

cu $f_0 \in C^1(X \times \overline{U})$ și se caută soluția următoarei probleme: dintre toate funcțiile $\mathbf{u}$ posibile care au proprietatea că punctul x din spațiul fazelor este dus din poziția $\mathbf{x}^0$ în poziția $\mathbf{x}^1$, să se găsească aceea care realizează minimul funcționalei $J(t_0$ și t_1 nu sînt obligatoriu fixați).

Pentru a formula principiul de maxim, se consideră sistemul de ecuații diferențiale

$$\dot{p}_j = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_j} p_k, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

unde $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ sînt funcții auxiliare și se formează funcția

$$\mathscr{H}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{p}, \mathbf{f}) = \sum_{j=0}^{n} p_j f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

cu ajutorul căreia, ținînd seama că variabila x_0 s-a definit prin

$$x_0(t) = \int_{t_0}^{t} f_0[\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)]\,\mathrm{d}s, \text{ deci } \dot{x}_0 = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \ \mathbf{x}_0(t_0) = 0,$$

sistemele diferențiale care apar se pot scrie sub forma simetrică

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_j}, \quad \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_j}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Considerînd $\mathbf{u}$ arbitrar (cunoscut), se poate determina vectorul $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ care verifică sistemul diferențial dat și condițiile inițiale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 = (0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ și să presupunem $\mathbf{x}$ definit pentru $t \in [t_0, t_1]$ cu ajutorul acestor vectori $\mathbf{x}$ și $\mathbf{u}$ se pot integra și

ecuațiile diferențiale care definesc vectorul $\mathbf{p}$ (presupunînd determinate condițiile inițiale).

Pentru $\mathbf{x}$ și $\mathbf{p}$ fixați (constanți), funcția $\mathscr{H}$ devine o funcție de $\mathbf{u} \in U$ și să notăm prin $\mathscr{M}$ marginea superioară

$$\mathscr{M} = \sup_{\mathbf{u} \in U} \mathscr{H}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

(egalitatea avînd loc aproape peste tot).

Teorema 2.1 (*Pontreaghin*). *Fie* $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ *un astfel de control încît traiectoria* $\mathbf{x}(t)$ *corespunzătoare cu* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ *să fie definită pentru orice* $t \in [t_0, t_1]$ *iar pentru* $t = t_1$ *să treacă printr-un punct al unei drepte* π. *Pentru ca* $\mathbf{u}$ *să devină o comandă optimală iar* $\mathbf{x}(t)$ *o traiectorie optimală este necesar să existe un vector absolut continuu* $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ *corespunzător lui* $\mathbf{u}$ *și* $\mathbf{x}$ *astfel încît*:

1) *funcția* $\mathscr{H}[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}]$ *de variabila* $\mathbf{u} \in U$ *să-și atingă aproape peste tot pe intervalul* $[t_0, t_1]$ *valoarea maximă pentru* $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$

$$\mathscr{H}[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] = \mathscr{M}[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t)];$$

2) *la momentul* $t_1 \in \mathbb{R}$ *să avem*

$$p_0(t_1) \leqslant 0, \ \mathscr{M}[\mathbf{p}(t_1), \mathbf{x}(t_1)] = 0.$$

În plus, dacă $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ *verifică sistemul*

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_j}, \quad \dot{x}_j = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial p_j}, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

și condiția 1), *atunci funcțiile* $p_0 = p_0(t)$ *și* $\mathscr{M} = \mathscr{M}[\mathbf{p}(t), \mathbf{x}(t)]$, *ca funcții de* t, *sînt constante (ceea ce înseamnă că verificarea relațiilor de la condiția* 2) *poate fi făcută pentru o valoare oarecare a lui* $t \in [t_0, t_1]$).

Principiul de maxim al lui Pontreaghin reprezintă o condiție necesară de optim pentru sisteme neliniare iar pentru sistemele liniare este o condiție și necesară și suficientă.

2.1.6. Rezolvarea problemei de sinteză

În baza exemplului a) din 2.1.2 a rezolva această problemă înseamnă a determina timpul minim în care un obiect, a cărui deplasare este definită prin sistemul

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u,$$

unde variabila de control verifică $|u| \leqslant k$, $k > 0$, ajunge, în spațiul fazelor, din punctul (x_1^0, x_2^0) în origine.

Utilizînd principiul de maxim, deoarece $f_0 = 1$, $f_1 = x_2, f_2 = u$, funcția $\mathscr{H}$ va fi

$$\mathscr{H}(t, x_1, x_2, u, p_1, p_2) = p_0 f_0 + p_1 f_1 + p_2 f_2 = p_0 + p_1 x_2 + p_2 u,$$

care, fiind liniară în u, își atinge valoarea maximă pentru $u = k \operatorname{sgn} p_2$; sistemul diferențial pentru funcțiile p_0, p_1 și p_2 va fi

$$\dot{p}_0 = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_0} = 0,\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_1} = 0,\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_2} = -p_1,$$

ceea ce înseamnă $p_1 = a \in \mathbb{R}$ și deci $p_2(t) = -at + b$. Presupunînd cunoscute valorile inițiale pentru p_1 și p_2, adică $p_1(t_0) = p_1^0$, $p_2(t_0) = p_2^0$, găsim

$$p_1(t) = p_1^0,\ p_2(t) = -p_1^0(t - t_0) + p_2^0;$$

dacă p_1^0 și p_2^0 ar fi cunoscuți, atunci, deoarece $u(t) = k \operatorname{sgn} p_2(t)$, problema ar fi fost rezolvată (problema determinării acestor valori reprezintă dificultatea centrală în aplicarea principiului de maxim); în cazul nostru avem $|u(t)| = |k \operatorname{sgn} p_2(t)| = k$ (deoarece $\operatorname{sgn} p_2(t)$ nu poate lua decît valorile ± 1) și în planul fazelor x_1, x_2 se poate defini o curbă $x_2 = \varphi(x_1)$, cu proprietatea că pe această curbă comanda u își schimbă semnul, care poartă de numirea de *linie de comutare a comenzii*. Cum

$$u(t) = k \operatorname{sgn}[p_2^0 - p_1^0(t - t_0)],$$

funcția $p_2(t)$ își schimbă semnul o singură dată, singurul zero al lui p_2 fiind

$$t' = t_0 + \frac{p_2^0}{p_1^0}$$

(evident $t_0 \leqslant t' \leqslant t_1$, dacă t_1 este timpul în care obiectul ajunge în origine). Rezultă că pentru comanda optimală $u = u(t)$, se obține o funcție continuă pe porțiuni, cu $|u(t)| = k$, avînd două subintervale ale lui $[t_0, t_1]$ în care păstrează semn constant; această proprietate a comenzii optimale $u = u(t)$ permite, în acest caz, să găsim traiectoriile optimale din spațiul fazelor.

Dacă $u(t) = +k$, se obține ecuația diferențială $\dfrac{dx_1}{dx_2} = \dfrac{1}{k} x_2$, deci $x_1(x_2) = \dfrac{1}{2k} x_2^2 + c_1$; se obține astfel o familie de parabole depinzînd de parametrul c_1; dacă se ia $c_1 = 0$, parabola va trece prin origine, celelalte parabole fiind paralele cu aceasta. În ipoteza $u(t) = -k$ se găsește $x_1(x_2) = -\dfrac{1}{2k} x_2^2 + c_2$; aceste curbe sînt tra-

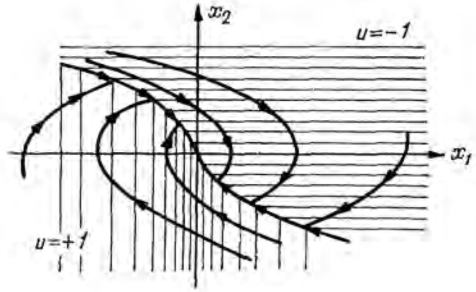

Fig. 2.2

sate în fig. 2.2 : planul fazelor este determinat prin $D_- \cup D_+ \cup P_- \cup P_+$ domeniul D_- fiind definit cu ajutorul unor arce de parabolă din familia $x_1 = -\dfrac{1}{2k} x_2^2 + c_2$, domeniul D_+, cu ajutorul unor arce de parabolă din familia $x_1 = \dfrac{1}{2k} x_2^2 + c_1$, iar curba $P_- \subset D_+$ este reuniunea arcelor $x_1 = -\dfrac{1}{2k} x_2^2$, $x_1 = \dfrac{1}{2k} x_2^2$, $x_1 > 0$. Prin orice punct al spațiului fazelor trece cîte un arc de parabolă iar traiectoria optimală este formată (în general) din două arce de parabolă; astfel, dacă A este punctul de plecare, traiectoria optimală este arcul AB $\left(\text{al parabolei } x_1 = -\dfrac{1}{2k} x_2^2 + c_2,\ c_2 = x_1^0 + \dfrac{1}{2k} x_2^{0 2}\right)$ împreună cu arcul BC $\left(\text{al parabolei } x_1 = \dfrac{1}{2k} x_2^2\right)$. În punctul B comanda se comută : se

trece de la comanda $u = -k$ (de pe arcul AB) la comanada $u = +k$ (care descrie arcul BO).

Aşadar, pentru a se obţine timpul minim în care obiectul ajunge cu viteză nulă în origine, plecînd din $x = x_1^0$, cu viteza x_2^0, în cazul considerat, un anumit interval de timp, deplasarea se realizează cu $u(t) = -k$, apoi se continuă deplasarea dar cu $u(t) = +k$, ajungîndu-se cu viteza nulă în origine.

2.1.7. Formulări echivalente în teoria controlului

Reluînd cele expuse în 2.1.1, vom considera cîteva probleme particulare, importante, deoarece vor fi utilizate frecvent în viitor, şi vom stabili legătura dintre ele.

Să considerăm o funcţională de forma

$$J[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = g[t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} f_0[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]\,dt$$

care reprezintă evident un caz particular al funcţionalelor care au intrat în definiţia unei probleme de control optimal formulată anterior (problemă Bolza) şi se presupune că t_0 şi t_1 nu sînt fixaţi ; să arătăm că problema de control cu astfel de funcţionale poate fi redusă la o problemă de control în care t_0 şi t_1 sînt fixaţi. Pentru aceasta se efectuează schimbarea de variabilă

$$t = t_0 + (t_1 + t_0)s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

şi se obţine $t = t_0$ dacă $s = 0$ şi $t = t_1$ dacă $s = 1$; deci $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ dacă $0 \leqslant s \leqslant 1$ şi dacă s este noua variabilă independentă, intervalul ei de variaţie este fixat ; efectuînd această schimbare în funcţionala în cauză, se obţine o funcţională de acelaşi tip, dar cu $s_0 = 0$ şi $s_1 = 1$. Trebuie menţionat însă că în acest caz sistemul diferenţial $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ trebuie şi el modificat, deoarece variabila independentă va fi s ; în plus, va apărea o nouă ecuaţie care trebuie ataşată acestui sistem, ecuaţia diferenţială de forma $\frac{dt}{ds} = t(s)$, unde funcţia t se determină cu ajutorul lui t_0 şi t_1.

Dacă se ia în considerare funcţionala anterioară, prin mărirea numărului de ecuaţii diferenţiale, se poate arăta că o problemă Bolza

se poate reduce la o problemă Mayer ; într-adevăr, definind variabila $x_0 = x_0(t)$ şi punind

$$x_0(t) = \int_{t_0}^{t} f_0[s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)]\,ds,$$

avem $x_0(t_0) = 0$, $\frac{dx_0}{dt} = f_0\,[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$, iar funcţionala J se va scrie

$$J[\mathbf{x}^*, \mathbf{u}] = g[t_0, \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}(t_1)] + \mathbf{x}_0(t_1) =$$
$$= g_1[t_0, \mathbf{x}_0(t_0), \mathbf{x}(t_0), t_1, \mathbf{x}_0(t_1), \mathbf{x}(t_1)],$$

unde $\mathbf{x}^* = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Trebuie reţinut că la ecuaţiile diferenţiale iniţiale trebuie adăugată şi ecuaţia $\dot{x}_0 = f_0$ iar condiţiile iniţiale se vor completa cu $x_0(t_0) = 0$.

2.2. Principiul maximului şi calculul variaţiilor

2.2.1. Noţiuni generale

Vom considera numerele reale t_0 şi t_1, $t_0 < t_1$ care determină un interval $[t_1, t_2]$ iar pe acest interval se definesc funcţiile

$$x_j = x_j(t), \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.15}$$

astfel încît fiecare funcţie x_j este absolut continuă pe acest interval, ceea ce are drept consecinţă existenţa aproape peste tot în $]t_0, t_1[$ a derivatelor $\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)$; vom presupune în plus că aceste derivate sînt mărginite

$$|\dot{x}_j(t)| \leqslant M, \; j = 1, 2, \ldots, n, \; t \in [t_0, t_1]. \tag{2.15'}$$

Dacă notăm prin x_j^0 şi x_j^1, $j = 1, 2, \ldots, n$, cele $2n$ numere reale, şi dacă

$$x_j(t_0) = x_j^0, \; x_j(t_1) = x_j^1, \; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.16}$$

atunci vom spune că funcţiile (2.15) verifică datele la capete (limită) (2.16).

Vom numi δ-vecinătate a funcţiilor (2.15) mulţimea funcţiilor $y_1(t), \ldots, y_n(t)$, absolut continue pe $[t_0, t_1]$, cu derivatele mărginite (acolo unde există), care verifică inegalitatea

$$\|x_j(t) - y_j(t)\| < \delta, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.17}$$

(unde $\|h(t)\| = \sup\limits_{t \in [t_1, t_2]} |h(t)|$) şi condiţiile la limită (2.16) :

$$y_j(t_0) = x_j^0, \qquad y_j(t_1) = x_j^1, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Din punct de vedere geometric, în $\mathbb{R}^n$, funcţiile (1.15) definesc o curbă γ, rectificabilă, care are capetele în $\mathbf{x}^0$ şi $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$, parametrul pe γ fiind t; în δ-vecinătatea (2.17) se vor afla toate curbele absolut continue şi cu derivata aproape peste tot mărginită, care trec prin $\mathbf{x}^0$ şi $\mathbf{x}^1$ şi care verifică $x_j(t) - \delta < y_j(t) < x_j(t) + \delta$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Vom presupune că aceste curbe se află într-un domeniu $D_n \subset \mathbb{R}^n$; vom defini $L : [t_0, t_1] \times D_n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, L funcţie de clasă C^1 în toate argumentele sale şi vom forma funcţionala de tip integral

$$J[x_1, \ldots, x_n] = \int_{t_1}^{t_2} L[t, x_1(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)]\, \mathrm{d}t \tag{2.18}$$

sau, pe scurt,

$$J[\mathbf{x}] = \int_{t_1}^{t_2} L[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]\, \mathrm{d}t. \tag{2.18'}$$

Evident, funcţionala J este definită pentru toate funcţiile din orice δ-vecinătate a curbei γ, dacă $\delta > 0$ este suficient de mic.

Dacă în mulţimea funcţiilor $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ din δ-vecinătatea definită anterior există $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(t)$ astfel încît $J[\mathbf{x}^*] \leqslant J[\mathbf{y}]$ pentru orice $\mathbf{y}$ din această vecinătate, vom spune că $\mathbf{x}^*$ realizează un minim (relativ) al funcţionalei J; schimbînd inegalitatea, se obţine definiţia unui maxim (relativ) pentru funcţionala (1.18) dar, pentru precizare, în viitor nu vom avea în vedere decît situaţiile de minim (dacă funcţionala J ar admite un maxim, atunci funcţionala $-J$ ar admite un minim, ceea ce înseamnă că este suficient să considerăm cazul unui minim).

Prin *problema fundamentală a calculului variaţiilor* se înţelege determinarea funcţiilor $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ (avînd proprietăţile menţioate) care realizează valorile extreme ale funcţionalei (2.18).

Exemplul 6. Probleme de determinare a valorilor extreme a unei funcţionale apar frecvent în practică; vom prezenta doar problema *brahistocronei*, definită în 1696 de J. Bernoulli, şi care poate fi considerată ca fiind cea mai veche problemă din teoria calculului variaţiilor.

Într-un plan vertical se consideră două puncte P_0 şi P_1, punctul P_0 fiind situat mai sus decît P_1; un corp cu masa m (o particulă, un punct material etc.) pleacă din P_0 cu viteza v_0 şi deplasîndu-se numai sub acţiunea gravitaţiei terestre ajunge în P_1; dintre toate curbele plane care trec prin P_0 şi P_1, problema brahistocronei va fi rezolvată, dacă se găseşte acea curbă pe care deplasarea se realizează în timp minim.

Pentru a exprima analitic această problemă, vom presupune curbele avînd ecuaţia $y = y(x)$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, dacă (x_0, y_0), (x_1, y_1) sînt coordonatele punctelor P_0, respectiv P_1. Fie γ o curbă cu capetele în P_0 şi P_1 şi $P \in \gamma$; în P acţiunea gravitaţiei conduce la valoarea $mg \cos\theta$, unde θ este unghiul determinat de tangenta în P la γ şi verticala locului. Dacă $s = s(t)$ este distanţa calculată pe γ parcursă de corp în timpul t, vom avea ecuaţia de mişcare

$$m\ddot{s} = mg \cos\theta,$$

care înmulţită cu $\frac{2}{m}\dot{s}$, deoarece $\cos\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$, conduce la ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{s}^2) = 2g\dot{y};$$

ţinînd seama că $\dot{s} = v$, prin integrare, se obţine egalitatea

$$v^2 - v_0^2 = 2g(y - y_0).$$

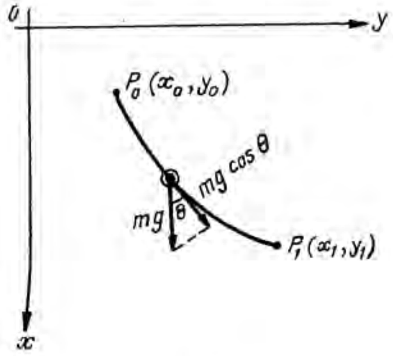

Fig. 2.3

Notînd $a = y_0 - \frac{1}{2g} v_0^2$, din această ecuaţie se deduce $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\right)$

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \int_0^s \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g(y-a)}} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2(x)}{2g[y(x) - a]}}\, \mathrm{d}x. \tag{2.18''}$$

Cu aceste calcule, rezultă că problema brahistocronei va fi rezolvată, dacă se găsește funcția $y = y(x)$ cu proprietatea că realizează un minim pentru funcționala de tip integral T.

Evident, expunerea anterioară face uz de teoria calculului variațiilor; problema brahistocronei poate fi rezolvată și direct cu ajutorul teoriei controlului, astfel: fie t_0 timpul în care corpul pleacă din P_0 și t_1 momentul în care ajunge în P_1; problema revine la găsirea timpului $t_1 - t_0$ minim, astfel încît să se verifice ecuațiile de mișcare

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2g(y-a)}\sin\theta, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2g(y-a)}\cos\theta, \quad \theta = \theta(t),$$

în care controlul se realizează asupra lui θ. Notînd $\sin\theta = u$, se obține forma întîlnită în teoria controlului a acestor ecuații

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2g(y-a)}\,u, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2g(y-a)}\sqrt{1-u^2};$$

restricțiile impuse vor fi

$$|u(t)| \leqslant 1, \; x(t_0) = x_0, \; y(t_0) = y_0.$$

2.2.2. Principiul maximului și sistemul Euler-Lagrange

Exemplul 6 arată că între problemele calculului variațiilor expuse în 2.2.1 și teoria controlului din 2.1 se poate stabili o legătură; vom utiliza această legătură pentru a deduce ecuațiile care conduc la rezolvarea problemei fundamentale. Pentru aceasta, vom considera funcționala de tip integral

$$J[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int_{t_0}^{t_1} L[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]\,\mathrm{d}t, \; \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n), \tag{2.19}$$

la care vom atașa sistemul diferențial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u} \tag{2.19'}$$

și restricțiile

$$|u_j(t)| \leqslant M, \; x_j(t_0) = x_j^0, \; x_j(t_1) = x_j^1, \; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.19''}$$

unde M este suficient de mare; vectorul de control $\mathbf{u}$ va avea componentele funcții măsurabile și mărginite, deci vom putea presupune $U = \mathbb{R}^n$. Deoarece se poate arăta că principiul maximului poate fi aplicat și la situația concretă de aici, va rezulta, în baza teoremei 2.1, că trebuie să considerăm funcția $\mathscr{H}$ definită prin

$$\mathscr{H} = p_0 L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + p_1 u_1 + \ldots + p_n u_n \tag{2.20}$$

la care vom atașa sistemul

$$\dot{p}_0 = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_0} = 0, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_j} = -p_0 \frac{\partial L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_j}, \; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.20'}$$

(deoarece p_0 este constant, după cum arată prima ecuație); comanda $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ optimală va verifica

$$\mathscr{H}[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)] = \sup_{\mathbf{u} \in U} [p_0 L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + p_1 u_1 + \ldots + p_n u_n]. \tag{2.20''}$$

Or, cum U este o mulțime deschisă ($U = \mathbb{R}^n$), valorile extreme ale lui $\mathscr{H}$ (în raport cu $u_1, \ldots, u_n$) se vor obține anulînd derivatele parțiale în raport cu aceste variabile; se deduce, din $\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u_j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$p_0 \frac{\partial L[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]}{\partial u_j} + p_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.22}$$

Aceste egalități arată că $p_0 = \text{const} \neq 0$ (altfel se deduce $p_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, deci $\mathscr{H} = 0$) și fără a micșora generalitatea, se poate presupune $p_0 = -1$ (sistemele pentru $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sînt omogene, deci aceste funcții vor fi determinate dacă se face abstracție de o constantă multiplicatăvă); în această situație, din (2.22) și (2.20′) se vor deduce egalitățile

$$p_j(t) = \frac{\partial L[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]}{\partial u_j} = p_j(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial L[s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)]}{\partial x_j}\,\mathrm{d}s, \tag{2.23}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

unde $p_j(t_0)$ sînt constante arbitrare (egalitatea avînd loc aproape pentru toți $t \in [t_0, t_1]$). Ținînd seama că $u_j = \dot{x}_j$, din (2.23) se deduce așa-numita formă integrală pentru sistemul Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]}{\partial \dot{x}_j} = c_j + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial L[s, \mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)]}{\partial x_j}\,\mathrm{d}s, \; j = 1, 2, \ldots, n; \tag{2.23'}$$

în concluzie, dacă problema variațională în studiu admite soluții (presupunînd $\mathbf{x}(t)$ vector cu componente absolut continue pentru $t \in [t_0, t_1]$ iar $|\dot{x}_j(t)| \leqslant M$, $j = 1, 2, \ldots, n$), aceste soluții $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ trebuie să verifice, aproape peste tot în $[t_0, t_1]$, egalitățile (2.23′). Dacă,

în particular, $L \in C^2$, $\mathbf{x} \in C^2([t_0, t_1])$, se pot elimina prin derivare constantele c_j din (2.23''), obţinîndu-se sistemul diferenţial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.24}$$

format din n ecuaţii de ordinul al doilea, numit *sistem Euler-Lagrange* ataşat funcţionalei de tip integral (2.18) şi care trebuie verificat de orice $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ care realizează un extrem pentru această funcţională. Aşadar, s-a demonstrat

Teorema 2.2. *Dacă există soluţii ale problemei variaţionale*

$$J[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]\,\mathrm{d}t \to \inf\,(\sup),$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \qquad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1,$$

în ipoteza $L \in C^2([t_0, t_1] \times D_n \times \mathbb{R}^n)$, $\mathbf{x}(t) \in C^2([t_1, t_2])$, *atunci aceste soluţii*, $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$, *trebuie să verifice sistemul diferenţial Euler-Lagrange* (2.24).

Transcrierea explicită a sistemului Euler-Lagrange (2.24) va fi

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j\,\partial \dot{x}_k}\ddot{x}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\,\partial x_k}\dot{x}_k\right) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j\,\partial t} - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.24'}$$

Este evident că acest sistem diferenţial va putea fi explicitat în raport cu derivatele de ordinul doi dacă matricea pătrată

$$\mathbf{M} = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j\,\partial \dot{x}_k}\right] \tag{2.24''}$$

este nesingulară. În această situaţie, se spune că problema variaţională este nesingulară (sau regulată), iar în caz contrar (cînd $\det \mathbf{M}=0$), problema variaţională este singulară, caz care nu va fi luat în consideraţie în viitor.

În cazul unei probleme variaţionale nesingulare, în ipoteza verificării condiţiilor teoremei de existenţă, va exista o familie de soluţii a sistemului Euler-Lagrange (2.24) care verifică condiţiile $x_j(t_0) = x_j^0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, dar nu se poate afirma că în această familie va exista o soluţie care să verifice şi restul de n condiţii impuse problemei

variaţionale în studiu: $x_j(t_1) = x_j^1$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Prin urmare, soluţiile sistemului Euler-Lagrange (2.24) nu sînt în mod obligatoriu soluţii ale problemei variaţionale date (trebuie ţinut seamă că principiul de maxim al lui Pontreaghin constituie doar o condiţie necesară de extrem); vom numi orice soluţie a sistemului (2.24), indiferent dacă realizează sau nu extremul funcţionalei (2.18) în condiţiile la limită (2.16), *extremală* pentru problema variaţională dată. Aşadar, cu ajutorul noţiunii de extremală, se ajunge la afirmaţia: problema variaţională (2.18), (2.16) dacă admite soluţii, aceste soluţii trebuie căutate numai printre extremalele acestei probleme.

În particular, dacă $n=1$, sistemul diferenţial (2.24) va conţine o singură ecuaţie şi anume

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \tag{2.25}$$

care se numeşte *ecuaţia Euler* ataşată problemei variaţionale

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_1} L[t, x(t), \dot{x}(t)]\,\mathrm{d}t \to \inf\,(\sup),$$

$$x(t_0) = x_0, \; x(t_1) = t_1;$$

forma explicită a ecuaţiei Euler va fi

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\,\partial x}\dot{x} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\,\partial t} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{2.25'}$$

iar condiţia de regularitate a problemei variaţionale impune ipoteza

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \not\equiv 0.$$

2.2.3. Condiţia suficientă de minim Legendre

Deoarece verificarea de către $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ a sistemului Euler-Lagrange (2.24) reprezintă doar o condiţie necesară de extrem pentru problema variaţională în cauză, pentru ca o extremală dată să realizeze un minim, trebuie găsite condiţii suficiente de minim; o condiţie suficientă simplă de minim se poate obţine cu ajutorul

funcţiei $\mathscr{H}$ definite de (2.20) ţinînd seama şi de (2.20″). Se ştie că o funcţie $\mathscr{H}$ de n variabile $u_1, \ldots, u_n$ va admite un maxim într-un punct staţionar, dacă în acest punct staţionar avem

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial u_j \partial u_k} \xi_j \xi_k \leqslant 0$$

pentru orice alegere a vectorului nenul $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$; deoarece

$$\mathscr{H} = p_1 u_1 + \ldots + p_n u_n - L[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}],$$

condiţia de maxim se va scrie (deoarece $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}$)

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k} \xi_j \xi_k \geqslant 0. \tag{2.26}$$

Prin urmare, pentru ca funcţionala (2.18) să admită de-a lungul curbei $\gamma : \mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ un minim [în ipoteza că sînt verificate condiţiile la capete (1.16)] este necesar ca $x_j = x_j(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ să verifice sistemul Euler-Lagrange (2.24) şi suficient ca pentru orice $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\xi} \neq 0$, să se verifice inegalitatea (2.26) care poartă denumirea de *condiţia Legendre* (pentru minim).

Dacă însă problema variaţională se referă la determinarea lui $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$, astfel încît să se realizeze un maxim pentru funcţionala (2.18), utilizînd posibilitatea transformării unei probleme de maxim într-o problemă de minim punînd $-L$ în loc de L, se deduce inegalitatea

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k} \xi_j \xi_k \leqslant 0, \tag{2.26′}$$

ca o condiţie suficientă de maxim.

Pentru $n=1$, scriind în loc de $x(t)$ funcţia $y=y(x)$, $x \in [x_0, x_1]$, deci $L = L[x, y(x), y'(x)]$, condiţia Legendre se va scrie

$$\frac{\partial^2 L[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'^2} \geqslant 0 \tag{2.26″}$$

în cazul minimului funcţionalei

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} L[x, y(x), y'(x)]\, \mathrm{d}x, \quad y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$$

sau

$$\frac{\partial^2 L[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'^2} \leqslant 0 \tag{2.26‴}$$

în cazul maximului aceleiaşi funcţionale.

De exemplu, în cazul brahistocronei, unde

$$L(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(y - a)}}, \qquad a \in \mathbb{R},$$

se obţine

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} = \frac{1}{\sqrt{2g(y-a)}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+y'^2})^3}$$

şi pentru orice $y = y(x)$, $x \in [x_0, x_1]$ vom avea $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \geqslant 0$, ceea ce face ca soluţia ecuaţiei Euler (dacă există) corespunzătoare să reprezinte efectiv un minim pentru funcţionala (2.18″).

Pentru a găsi extremele în cazul brachistochronei, vom face mai întîi observaţia că dacă $L = L(y, y')$ $\left(\text{deci dacă } \frac{\partial L}{\partial x} = 0\right)$, atunci ecuaţia Euler (1.25) admite integrala primă

$$L_* = L - y' \frac{\partial L}{\partial y'}; \tag{2.25′}$$

într-adevăr, deoarece

$$\frac{\mathrm{d}L_*}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial L}{\partial y'} y'' + \frac{\partial L}{\partial y} y' - y'' \frac{\partial L}{\partial y'} - y' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = -y' \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y}\right]$$

de-a lungul extremalelor avem $L_* =$ const. Or în cazul de faţă $L_* =$ const conduce la ecuaţia diferenţială (cu $a = 0$, deci $y_0 = 0$, $x_0 = 0$)

$$y' = \sqrt{\frac{b - y}{y}}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

Punînd $y = b \sin^2 \frac{t}{2}$, t fiind un parametru, se deduce $y' = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$, deci

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\operatorname{ctg} \frac{t}{2}} = \frac{b \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{t}{2}} \mathrm{d}t = b \sin^2 \frac{t}{2} \mathrm{d}t$$

iar, prin integrare,

$$x = c + \frac{b}{2}(t - \sin t), \quad y = \frac{b}{2}(1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R},$$

ceea ce înseamnă că extremalele, deci şi curbele care realizează minimul funcţionalei (1.18'') sînt *cicloide*.

2.2.4. Variabile canonice

În consideraţiile legate de principiul maximului, un rol deosebit îl joacă funcţiile $p_0, p_1, \ldots, p_n$ iar în ipotezele făcute în acest capitol, presupunînd funcţiile $p_1, p_2, \ldots, p_n$, funcţii necunoscute, se pot obţine unele simplificări în calcule; vom conveni să numim funcţiile

$$x_1(t), \ldots, x_n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t) \tag{2.27}$$

variabile canonice ale problemei variaţionale (2.18), (2.16).

Pentru a deduce sistemul diferenţial verificat de variabile canonice (2.27), vom considera funcţia $\mathscr{H}$ din 2.2.2,

$$\mathscr{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = -L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{j=1}^{n} p_j u_j$$

şi vom nota cu $\mathscr{M}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ valoarea maximă a funcţiei $\mathscr{H}$, cînd $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$;

$$\mathscr{M}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} \mathscr{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}); \tag{2.28}$$

vom presupune că ecuaţia (2.28) admite o singură soluţie

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \tag{2.28'}$$

care se obţine rezolvînd sistemul

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u_k} = 0, \text{ adică } p_j - \frac{\partial L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.28''}$$

vectorul $\mathbf{u}$ fiind presupus de clasă C^1 în toate argumentele, astfel încît

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \ |x_j - x_j(t)| < |p_j - p_j(t)| < \delta, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.29}$$

cu $\delta > 0$, ales convenabil. În aceste ipoteze, funcţia H definită prin

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = -L[t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})] + \sum_{j=1}^{n} p_j u_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \tag{2.30}$$

se va numi *funcţia Hamilton* (pe scurt, *hamiltonianul*) problemei variaţionale (2.18), (2.16). Deoarece în consideraţiile făcute avem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$, rezultă că $\mathbf{u}$ definit prin (2.28') va verifica sistemul diferenţial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{u}(t) \quad (= \mathbf{u}[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)]) \tag{2.28'''}$$

(egalitatea avînd loc pentru orice $t \in [t_0, t_1]$, deoarece $\mathbf{u}$ este de clasă C^1).

Pentru a deduce sistemul diferenţial verificat de funcţiile (2.27), vom calcula $\frac{\partial H}{\partial p_j}$ şi $\frac{\partial H}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$; în baza lui (2.28'') avem

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} + u_j + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial u_k}{\partial p_j} = u_j + \sum_{k=1}^{n} \left(p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) \frac{\partial u_k}{\partial p_j} = u_j$$

şi dacă se utilizează (2.28'''), se găseşte

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial p_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.31'}$$

În baza lui (2.28'') putem scrie

$$\frac{\partial H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial x_j} = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial u_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial u_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial x_j} =$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \left(p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}\right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = -\frac{\partial L}{\partial x_j},$$

de unde, deoarece în baza lui (2.22) avem $\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $(p_0 = -1)$, se deduc şi ecuaţiile

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.31''}$$

Sistemele diferențiale (2.31′) și (2.31″) formează împreună sistemul canonic hamiltonian

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial p_j} \\ \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\partial H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})}{\partial x_j} \end{aligned}\right\} \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.30}$$

care este verificat de către funcțiile $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, $p_1(t), \ldots, p_n(t)$ în fiecare punct $t \in [t_0, t_1]$.

Sistemul canonic (2.30) este format din $2n$ ecuații diferențiale de ordinul întîi și posedă particularitatea [față de sistemul Euler-Lagrange (2.24)] importantă că este direct scris sub formă normală; integrînd acest sistem, funcțiile $x_j = x_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, vor fi extremalele problemei variaționale (2.18), (2.16).

Nu oricărei probleme variaționale (2.18), (2.16) i se poate atașa funcția Hamilton (2.30), deoarece pentru ca să-l putem defini pe H, va trebui să determinăm vectorul $\mathbf{u}$ din sistemul (2.28″), ceea ce este echivalent, în baza teoremei funcțiilor implicite, cu faptul că matricea $\mathbf{M}$ definită prin (2.24″) este nesingulară (deci este cazul unei probleme variaționale regulate).

Practic, funcția H se găsește înlocuind $u_1, u_2, \ldots, u_n$ în (2.30) prin funcțiile $u_1, \ldots, u_n$ deduse din sistemul (2.28″).

Exemplul 7. Să considerăm problema variațională

$$J[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_1} t^2 (\dot{x}_1^2 + \ldots + \dot{x}_n^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2)\, \mathrm{d}t \to \inf$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \qquad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1,$$

în care $0 < t_0 < t_1$; aici

$$L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = t^2(|\dot{\mathbf{x}}|^2 - |\mathbf{x}|^2)$$

iar sistemul Euler-Lagrange va fi $\left(\text{deoarece } \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = 2\dot{x}_j t^2, \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = -2x_j t^2\right)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t^2 \dot{x}_j) + 2t^2 x_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

adică

$$t\ddot{x}_j + 2\dot{x}_j + tx_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

cu schimbarea $\mathbf{x} \to \dfrac{1}{t}\mathbf{y}$, acest sistem se integrează iar extremalele vor fi

$$x_j(t) = c_1^j \frac{\cos t}{t} + c_2^j \frac{\sin t}{t}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Condițiile la limită vor fi verificate numai dacă se aleg t_0 și t_1 astfel încît să avem $\sin(t_1 - t_0) \neq 0$ (deci $t_1 \neq t_0 + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$); deoarece $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j^2} = 2t^2$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j\, \partial \dot{x}_k} = 0$, $j \neq k$, condiția suficientă de extrem (condiția Legendre) va fi $\sum_{j,k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k} \xi_j \xi_k = 2t^2 |\xi|^2 > 0$, soluțiile în cauză (dacă există) vor realiza un minim pentru funcționala J. Acest minim se poate calcula, introducîndu-se $x_j(t)$ și $\dot{x}_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, în integrală și efectuînd calculele.

Hamiltonianul corespunzător se obține exprimînd $\dot{x}_j$ în funcție de p_j din egalitățile $2t^2 \dot{x}_j = p_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, înlocuind în

$$H = -L + \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{x}_j;$$

se obține imediat

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = t^2 |\mathbf{x}|^2 + \frac{1}{4t^2} |\mathbf{p}|^2;$$

sistemul canonic va fi

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{1}{2t^2} p_j, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} = -2t^2 x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Integrarea acestui sistem se poate realiza prin eliminare; avem $p_j = 2t^2 \dot{x}_j$, deci $\dot{p}_j = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t\dot{x}_j) = -2t^2 x_j$ iar ultima egalitate conduce la sistemul Euler-Lagrange integrat mai sus; p_j se obține înlocuind $\dot{x}_j$ în $p_j = 2t\dot{x}_j$.

2.2.5. Integrale prime

În anumite cazuri particulare, atît sistemul canonic, cît și sistemul Euler-Lagrange, atașat unei probleme variaționale admite integrale prime simple; evident, la o integrală primă a sistemului Euler-Lagrange va corespunde o integrală primă a sistemului canonic corespunzător și reciproc.

Astfel, dacă funcția L nu depinde explicit de variabila t, nici hamiltonianul H nu va depinde explicit de t; în acest caz, sistemul

canonic (care este deci un sistem autonom) va admite funcţia H o integrală primă, deoarece

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}+\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{dp_j}{dt}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)=0.$$

Evident, integrala primă corespunzătoare pentru sistemul Euler-Lagrange va fi funcţia $L_* = L_*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, unde

$$L_* = L - \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial x_j}, \tag{2.31}$$

deoarece L_* nu este altceva decît $-H$.

Dacă funcţia L este de forma

$$L = L(t, x_1, \ldots, x_k, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n), \quad k < n,$$

atunci, scriind ecuaţiile Euler-Lagrange pentru $j = k+1, \ldots, n$, deoarece $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$, se vor obţine $n-k$ integrale prime $F_{k+1}, \ldots, F_n$, unde

$$F_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}, \; j = k+1, \ldots, n, \tag{2.31'}$$

în baza faptului că sistemul Euler-Lagrange va conţine ecuaţiile $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) = 0, j = k+1, \ldots, n$. Corespunzător, sistemul canonic va admite integralele prime $p_{k+1}, \ldots, p_n$ $\left(\text{deoarece } p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right.$ sau utilizînd faptul că dacă în L nu apar variabilele $x_{k+1}, \ldots, x_n$, H are aceeaşi proprietate, deci $\left.\frac{\partial H}{\partial x_j} = 0, j = k+1, \ldots, n\right)$.

În baza teoriei generale, cu aceste integrale prime integrala sistemelor diferenţiale se va simplifica: existenţa unor integrale prime conduce la reducerea numărului de ecuaţii a sistemului.

2.2.6. Principii variaţionale ale mecanicii

Vom considera un sistem mecanic ale cărui poziţii posibile sînt determinate cu ajutorul a n variabile independente, pe care le vom nota cu $q_1, q_2, \ldots, q_n$ şi pe care le vom numi *coordonatele generalizate* ale acestui sistem, n fiind numărul de grade de libertate ale sistemului. Vom presupune cunoscută energia cinetică T a acestui sistem, care va fi un polinom de gradul al doilea în variabilele $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ (vitezele generalizate), coeficienţii fiind funcţii de $t, q_1, \ldots, q_n$; de asemenea, se presupune cunoscută energia potenţială U a sistemului considerat care este o funcţie de t şi $q_1, q_2, \ldots, q_n$: $U = U(t, q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Vom presupune valabil principiul lui Hamilton pe care îl vom formula sub formă de teoremă.

Teorema 2.3 (*principiul lui Hamilton*). *În intervalul de timp cuprins între momentele t_0 şi t_1 mişcarea sistemului, avînd energia cinetică T şi energia potenţială U, se realizează astfel încît funcţiile $q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t)$ minimizează funcţionala*

$$J[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} L[t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)]\,dt, \tag{2.34}$$

$L = T - U$, minimul fiind realizat în mulţimea funcţiilor de clasă C^2 care au aceleaşi valori pentru $t = t_0$ şi $t = t_1$ ca şi funcţiile $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Cu alte cuvinte, mişcarea sistemului în cauză se realizează astfel încît funcţionala J are o valoare staţionară în raport cu toate mişcările posibile care sînt vecine cu traiectoria reală şi au aceleaşi poziţii iniţiale şi finale.

Sistemul Euler-Lagrange ataşat funcţionalei (2.34) se va scrie

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-U) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.34'}$$

şi este cunoscut în mecanica teoretică sub denumirea de *sistemul ecuaţiilor de mişcare de speţa a doua ale lui Lagrange.*

Dacă sistemul considerat se află în echilibru, deci energia sa cinetică este nulă iar energia potenţială nu depinde de t, din sistemul diferenţial (2.34') se pot deduce egalităţile

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

care arăta că într-o astfel de poziţie energia potenţială a sistemului este staţionară (minimă); acest fapt stă la baza *principiului minimului energiei potenţiale* care este adesea folosit în studiul problemelor de echilibru.

Ecuaţiile de mişcare ale sistemului iau o formă foarte simplă în vecinătatea unei poziţii de echilibru a acestuia; astfel, presupunînd

că T și U nu depind de t decît prin intermediul coordonatelor generalizate $q_1, q_2, \ldots, q_n$, iar poziția de echilibru este $q_1 = 0, \ldots, q_n = 0$, dezvoltînd în serie, avem

$$T = \sum_{j,k=1}^{n} P_{jk}(\mathbf{q})\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k \approx \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k,$$

$$U = U(\mathbf{q}) = U(\mathbf{0}) + \sum_{j=1}^{n} q_j \left.\frac{\partial U}{\partial q_j}\right|_{q_j=0} + \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}\,q_j q_k = U_0 + \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}\,q_j q_k,$$

unde $a_{jk} = P_{jk}|_{\mathbf{q}=0}$, $U_0 = U(\mathbf{0})$, $b_{jk} = \left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_j\,\partial q_k}\right|_{\mathbf{q}=0}$. Energia cinetică și cea potențială vor fi în acest caz, în primă aproximație, forme pătratice în variabilele $\dot{\mathbf{q}}$, respectiv $\mathbf{q}$, iar sistemul Euler-Lagrange devine un sistem diferențial format din n ecuații de ordinul al doilea cu coeficienți constanți :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\,\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\,q_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Acest sistem definește micile deplasări față de poziția de echilibru a sistemului considerat.

Principiul lui Hamilton și principiul minimului energiei potențiale vor fi larg utilizate în viitor pentru construcția unor modele matematice pentru mișcări și poziții de echilibru ale unor procese fizice mult mai complicate decît situația anterioară (cînd s-au avut în vedere sisteme mecanice cu un număr finit de grade de libertate); astfel, energia cinetică sau cea potențială pot să nu fie funcții de un număr finit de variabile independente și derivatele lor, ci pot fi exprimate, de exemplu, prin integrale de volum sau de suprafață.

Exemplul 8. *Mișcarea unui punct material in* $\mathbb{R}^3$. Presupunind poziția unui punct material avînd masa m care descrie o traiectorie în $\mathbb{R}^3$, definită prin vectorul $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, $\mathbf{r} \in C^2([t_1, t_2])$, atunci energia cinetică va fi

$$T(t) = \frac{1}{2} m[\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)]$$

iar în ipoteza că asupra acestui punct acționează un cîmp conservativ de forțe, deci $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U(x, y, z)$, energia potențială va fi egală cu $U = U(x, y, z)$; aplicînd principiul lui Hamilton, traiectoriile posibile ale acestui punct material vor coincide cu extremalele funcționalei

$$J[x, y, z] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} m\,[\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)] - U(x, y, z) \right) \mathrm{d}t,$$

În acest caz, sistemul Euler-Lagrange se scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}) + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{y}) + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{z}) + \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

și deoarece $\dfrac{\partial U}{\partial x} = -F_x$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = -F_y$, $\dfrac{\partial U}{\partial z} = -F_z$, se obțin ecuațiile lui Newton

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z.$$

Un alt principiu variațional al mecanicii, dar nu atît de general decît principiul lui Hamilton, este *principiul lui Maupertuis-Lagrange-Jacobi*; acest principiu este aplicabil cînd energia potențială U nu depinde explicit de timpul t iar energia cinetică este o formă pătratică în variabilele $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$:

$$T = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k, \ (a_{jk} = a_{kj}), \ U = U(q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

În baza lui 2.2.5, în ipotezele noastre, sistemul Euler-Lagrange va admite integrala primă $L_* = L - \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$; or, deoarece prin ipoteza T este formă omogenă de gradul doi, se deduce (în baza identității lui Euler pentru funcții omogene)

$$L = T - U - \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = T - U - 2T = -(T + U).$$

Convenind să numim funcția $T + U$ energia totală a sistemului considerat, din $L_* = -h$ pe extremalele în cauză, se deduce că mișcarea acestui sistem mecanic se realizează astfel încît energia lui totală este constantă :

$$T + U = h;$$

de aici se deduce $T = h - U$ și deoarece $T = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k$, $a_{jk} = a_{jk}(q_1, \ldots, q_n)$, $\dot{q}_j = \dfrac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t}$, se obține

$$\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\Sigma a_{jk}\,\mathrm{d}q_j\,\mathrm{d}q_k}{T}}, \quad \text{deci } \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\Sigma a_{jk}\,\mathrm{d}q_j\,\mathrm{d}q_k}}{\sqrt{h - U}},$$

egalitate care permite stabilirea unei legături între parametrul s ales pe traiectoria sistemului, presupunînd ecuațiile parametrice ale traiectoriei γ de forma

$$q_j = q_j(s), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Principiul lui Maupertuis-Lagrange-Jacobi afirmă cu în ipotezele enunțate, mișcarea sistemului material, pentru o energie totală h cunoscută, se realizează de-a lungul extremalelor funcționalei

$$2\int_\gamma \sqrt{h-U}\sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\, \mathrm{d}q_j\, \mathrm{d}q_k} = 2\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{h-U}\sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\, q_j' q_k'}\, \mathrm{d}s,$$

unde $q_j' = \dfrac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}s}$. Deoarece din egalitățile anterioare se deduce

$$\sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\, q_j'\, q_k'}\, \mathrm{d}s = \sqrt{h-U}\, \mathrm{d}t,$$

integrala care apare în problema variațională care exprimă acest principiu va fi de fapt

$$2\int_{t_0}^{t_1}(\sqrt{h-U})^2\, \mathrm{d}t = 2\int_{t_0}^{t_1} L\, \mathrm{d}t,$$

integrală care se numește *acțiune lagrangiană* (a mișcării în cauză); cu această observație, justificarea principiului lui Maupertuis-Lagrange-Jacobi este evidentă. De remarcat că acest principiu definește forma traiectoriei nu și timpul, care se poate determina cu ajutorul constantei energiei h. Acest principiu mai este cunoscut și sub denumirea *principiul celei mai mici acțiuni* și arată că dacă el este aplicabil, atunci traiectoria mișcării este o geodezică (vezi 2.3.4).

În încheiere, să facem cîteva referiri la pendulul matematic; dacă acest pendul are lungimea l iar θ este unghiul dintre verticală și o poziție oarecare a pendulului, este ușor de calculat energia cinetică

$$T = \frac{1}{2} ml^2\, \dot{\theta}^2$$

ca și energia potențială

$$U = \int_0^{\theta} mg\, l \sin t\, \mathrm{d}t = mgl\,(1 - \cos\theta)$$

(energia potențială poate fi considerată ca fiind lucrul mecanic al forței $mg \sin\theta$, m fiind masa pendulului). Deoarece

$$L = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta),$$

se obține ecuația de mișcare

$$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0.$$

Utilizînd principiul minimului energiei potențiale, este evident că, deoarece $U \geqslant 0$, valoarea minimă se atinge pentru $\theta = 0$, adică atunci cînd pendulul se află în poziție verticală; este evident cazul unei poziții de echilibru stabil, deoarece mai există o poziție de echilibru (însă instabil) cînd $\theta = \pi$, iar energia potențială are valoarea maximă (egală cu $2mgl$).

2.3. Ecuația Hamilton-Jacobi

2.3.1. Ecuația Bellman și legătura ei cu ecuația Hamilton-Jacobi

Să presupunem că un sistem oarecare este caracterizat în intervalul $[t_0, t_1]$ cu ajutorul sistemului diferențial

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{2.35}$$

și totodată se verifică datele inițiale

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0; \tag{2.35'}$$

să presupunem că problema este de a determina acel control $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*(t) \in U$, care aduce sistemul din poziția inițială $\mathbf{x}^0$ în poziția $\mathbf{x}(t)$, $t_0 < t \leqslant t_1$, astfel încît integrala

$$J[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int_{t_0}^{t} L[s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)]\, \mathrm{d}s \tag{2.36}$$

să fie staționară. Vom nota

$$W[t, \mathbf{x}(t)] = \inf_{\mathbf{u}\in U}\int_{t_0}^{t} L[s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)]\, ds \tag{2.37}$$

(dacă este cazul unui minim; cazul maximului se tratează analog); dacă $\mathbf{u}^*(s)$, $t_0 \leqslant s \leqslant t$, este controlul căutat, care minimizează funcționala (2.36), vom avea, evident,

$$W[t, \mathbf{x}(t)] = \int_{t_0}^{t} L[s, \mathbf{x}(s), \quad \mathbf{u}^*(s)]\, ds,$$

în ipoteza că $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ este traiectorie sistemului (2.35), (2.35′) care corespunde lui $\mathbf{u}=\mathbf{u}^*(t)$. Dacă pe această traiectorie se consideră punctul $\mathbf{x}(t-h)$, $h>0$, arcul de traiectorie dintre $\mathbf{x}^0$ și $\mathbf{x}(t-h)$ este de asemenea o traiectorie optimală [în ipoteza $\mathbf{x}^0$ și $\mathbf{x}(t-h)$ fixați], ceea ce înseamnă că va fi verificată egalitatea

$$W[t, \mathbf{x}(t)] - \int_{t-h}^{t} L[s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}^*(s)]\, ds = W[t-h, \mathbf{x}(t-h)],$$

adică

$$W[t-h, \mathbf{x}(t-h)] = W[t, \mathbf{x}(t)] - L[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t)]h + O(h).$$

Presupunînd W diferențiabilă și urmînd punct cu punct raționamentul din 2.1.4 care a condus la ecuația lui Bellman, se deduce ecuația cu derivate parțiale

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} f_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*) - \frac{\partial W(t, \mathbf{x})}{\partial t} = 0, \tag{2.38}$$

care se mai poate scrie

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W(t, \mathbf{x})}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} - \frac{\partial W(t, \mathbf{x})}{\partial t} = 0. \tag{2.38′}$$

Presupunînd că în funcționala (2.36) L este funcția lui Lagrange a unui proces dinamic, vom schimba notațiile scriind $q_1, \ldots, q_n$ în loc de $x_1, \ldots, x_n$ și $p_1, \ldots, p_n$ în loc de $u_1, \ldots, u_n$; deoarece valoarea staționară a funcționalei (2.36) se obține cînd $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$ verifică sistemul canonic

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.39}$$

cu $H = -L + \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j p_j$, $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, rezultă că dacă se atașează acestei funcționale sistemul diferențial

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.39′}$$

variabilele $p_1, \ldots, p_n$ pot fi considerate variabile de control. De aceea, utilizînd ecuația (2.38′), valoarea staționară a funcționalei $\int_{t_0}^{t} L\, ds$ va verifica ecuația cu derivate parțiale

$$L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W(t, \mathbf{q})}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial W(t, \mathbf{q})}{\partial t} \tag{2.38″}$$

în ipoteza că variabilele $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ reprezintă comanda optimală; or această comandă optimală se obține dacă $p_1, \ldots, p_n$ verifică sistemul canonic (2.39), ceea ce înseamnă că avem

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.39″}$$

Derivînd ecuația (2.38″) în raport cu $\dot{q}_j$, $j = 1, \ldots, n$, se găsesc egalitățile

$$\frac{\partial W}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

care, comparate cu (2.39″), arată că

$$p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

ceea ce are drept consecință transcrierea ecuațiilor (2.39′) sub forma

$$\frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j\left(t, q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right);$$

revenind la ecuaţia cu derivate parţiale (2.38''), deoarece

$$L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) - \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial W}{\partial q_j} =$$

$$= - H\left(t, q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right),$$

dacă $p_j = \dfrac{\partial W}{\partial q_j}$ [$\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ se obţin rezolvînd sistemul (2.39'')], ultima ecuaţie se scrie

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = 0$$

şi poartă numele de *ecuaţia Hamilton-Jacobi*, ataşată problemei variaţionale care admite hamiltonianul $H = H(t, \mathbf{p}, \mathbf{q})$.

Exemplul 9. Fie un sistem dinamic cu un singur grad de libertate q, avînd energia cinetică $T(q) = \frac{1}{2} m\dot{q}^2$ şi energia potenţială $U(q) = \frac{1}{2} aq^2$, a fiind o constantă reală. Funcţia lui Lagrange fiind

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \frac{1}{2} aq^2,$$

deplasarea sistemului în cauză se realizează pe extremalele funcţionalei

$$J[q] = \int_{t_0}^{t_1} L[q(t), \dot{q}(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [m\dot{q}^2(t) - aq^2(t)]\, dt,$$

dacă intervalul de timp al mişcării este $[t_0, t_1]$. Ecuaţia Euler corespunzătoare fiind

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = m\ddot{q} + aq = 0,$$

funcţia $q = q(t)$ se obţine imediat. Deoarece

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q},$$

se deduce uşor hamiltonianul problemei:

$$H = H(q, p) = [-L(q, \dot{q}) + p\dot{q}]\Big|_{\dot{q} = \frac{1}{m}p} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{a}{2}q^2;$$

sistemul canonic se scrie

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{m}p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = aq.$$

Problema de control optimal care apare aici se referă la minimizarea funcţionalei

$$J[q, u] = \int_t^{t_0}\left[\frac{1}{2m}u^2(t) - \frac{a}{2}q^2(t)\right] dt$$

sub restricţiile

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{m}p, \quad q(t_0) = q_0.$$

Ecuaţia cu derivate parţiale pentru $W = \min_{u \in U} J$, va fi

$$\frac{1}{2m}p^2 - \frac{1}{2}aq^2 - \frac{\partial W}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

de unde, punind $\dfrac{\partial W}{\partial q}$ în loc de p, deci $\dot{q} = \dfrac{1}{m}p = \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial W}{\partial q}$, se va găsi ecuaţia Hamilton-Jacobi,

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}aq^2 = 0,$$

care se poate deduce şi direct din expresia lui H.

2.3.2. Ecuaţia Hamilton-Jacobi

S-a văzut că dacă problema variaţională

$$\int_{t_0}^{t} L[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]\, dt \to \inf(\sup),$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \ \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}$$

admite o soluţie, atunci notînd cu $W = W(t, \mathbf{x})$ valoarea minimă (maximă) a acestei funcţionale, adică, cu alte cuvinte, calculînd funcţionala de-a lungul unei extremale, funcţia W verifică o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întîi, explicitată în raport cu derivata $\dfrac{\partial W}{\partial t}$. Dacă lagrangianul L este determinat, în ipoteza că problema

variaţională nu este singulară, este unic determinat hamiltonianul

$$H = -L + \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{x}_j,$$

unde $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$ se înlocuiesc prin $x_j(t, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$, deduşi din egalităţile

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n;$$

odată găsit acest hamiltonian, ecuaţia Hamilton-Jacobi ataşată problemei variaţionale cu L dat se va scrie imediat;

$$\frac{\partial z}{\partial t} + H\left(t, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{2.40}$$

[notînd cu $z = z(t, x_1, \ldots, x_n)$ funcţia necunoscută].

Această ecuaţie posedă două particularităţi importante: este explicitată în raport cu una din derivatele parţiale $\left(\text{aici este derivata parţială } \frac{\partial z}{\partial t}\right)$ şi, apoi, funcţia necunoscută z nu apare direct. În baza artificiului lui Jacobi (vezi 1.3.1) orice ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întîi

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

se poate transforma într-o ecuaţia de forma (2.40), scriind $u = x_{n+1}$ şi considerînd variabilele independente $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ scrise implicit sub forma $z(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = z_0$, z_0 fiind o constantă. Deoarece

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_j} = -\frac{\partial z}{\partial x_j} \Big/ \frac{\partial z}{\partial x_{n+1}},$$

ecuaţia devine

$$F\left(x_1, \ldots, x_{n+1} - \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial z}{\partial x_{n+1}}}, \ldots, -\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial z}{\partial x_{n+1}}}\right) = 0$$

iar explicitarea lui $\frac{\partial z}{\partial x_{n+1}}$ va conduce la o ecuaţie de forma

$$\frac{\partial z}{\partial x_{n+1}} + f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

care de fapt este ecuaţia (2.40).

Utilizînd notaţiile lui Monge

$$\frac{\partial z}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial z_j} = p_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

ecuaţia (2.40) se scrie

$$p + H(t, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0;$$

sistemul caracteristicilor ataşat acestei ecuaţii va fi

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dt}{1} = \frac{dz}{p + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial H}{\partial p_j}} =$$

$$= -\frac{dp}{\frac{\partial H}{\partial t}} = -\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}}$$

şi deci parametrul pe caracteristici va putea fi considerat chiar variabila t şi vom avea

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.41}$$

$$\frac{dz}{dt} = p + \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} - H, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{2.41'}$$

Se observă că ecuaţiile (2.41) formează un sistem cu $2n$ ecuaţii diferenţiale care se poate integra independent de celelalte ecuaţii (2.41') ale sistemului caracteristic; dacă din sistemul (2.41) s-au obţinut funcţiile

$$x_j = x_j(t;\, x_1^0, \ldots, x_n^0,\, p_1^0, \ldots, p_n^0),$$

$$p_j = p_j(t;\, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0),\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

atunci înlocuindu-se în ecuațiile rămase (2.41′), se obțin și funcțiile p și z prin integrare directă:

$$p = p(t; x_1^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0) + p_0, \quad z = z(t; x_1^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0) + z_0$$

Este ușor de recunoscut faptul că între ecuațiile sistemului caracteristic al ecuației Hamilton-Jacobi (2.40) se află și ecuațiile sistemului canonic atașat unei probleme variaționale în care hamiltonianul este funcția $H = H(t, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ care definește ecuația (2.40); de aceea, se poate afirma că integrarea ecuației cu derivate parțiale (2.40) poate fi redusă la integrarea sistemului canonic cu hamiltonianul H.

Un fapt cu totul remarcabil a fost demonstrat de către Jacobi și anume: dacă se cunoaște un anumit tip de soluție a ecuației Hamilton-Jacobi (2.40), integrarea sistemului canonic (cu hamiltonianul H) se reduce la o problemă de explicitare. Acest rezultat este cunoscut ca *teorema lui Jacobi*.

2.3.3. Teorema lui Jacobi

Reluînd faptele care au condus la considerarea ecuației Hamilton-Jacobi (2.40), rezultă că soluția z are particularitatea că depinde de n parametri; într-adevăr, scriind $z = W(t, \mathbf{x})$, prin definiție W este valoarea staționară a integralei $\int_{t_0}^{t} L[s, \mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)]\, \mathrm{d}s$, calculată de-a lungul extremalelor care verifică condițiile $x_j(t_0) = x_j^0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Or, extremalele fiind soluții ale unui sistem diferențial format cu ecuații de ordinul al doilea, aceste condiții vor determina numai n din cele $2n$ constante de integrare, n parametri rămînînd arbitrari.

Soluțiile ecuației Hamilton-Jacobi care depind de un număr de parametri vor fi funcțiile care vor rezolva problema pusă la sfîrșitul lui 2.3.2.

Vom numi *integrală completă* a ecuației Hamilton-Jacobi (2.40) orice soluție $z = \varphi$ a acestei ecuații, de clasă C^2 într-un anumit domeniu al argumentelor sale, care depinde de $n + 1$ constante arbitrare (dintre care una aditivă) și care verifică

$$\det\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j\, \partial a_k}\right] \neq 0, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.42}$$

în domeniul de existență al soluției.

Teorema 2.4 (*Jacobi*). *Dacă pentru ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi, scrisă sub forma Hamilton-Jacobi*

$$\frac{\partial z}{\partial t} + H\left(t, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{2.43}$$

se cunoaște o integrală completă

$$z = \varphi(t, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) + a, \tag{2.43′}$$

atunci din sistemul de ecuații

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_j} = b_j, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = p_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.43′}$$

care conține $2n$ constante arbitrare $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, se obține soluția generală a sistemului canonic

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.43″}$$

în mod următor: din primele n ecuații (2.43′), în baza condiției (2.42) se extrag funcțiile

$$x_j = x_j(t; a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.44}$$

care reprezintă extremalele problemei variaționale care conduce la hamiltonianul H: înlocuind apoi funcțiile (2.44) în ultimele n ecuații ale sistemului (2.43′), se vor obține direct soluțiile $p_1, \ldots, p_n$ ale sistemului canonic

$$p_j = p_j(t, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.44′}$$

⌐ Demonstrația se reduce la o verificare: să arătăm că funcțiile (2.44) verifică primele n ecuații ale sistemului canonic (2.43″). Pentru aceasta se înlocuiește integrala completă (2.43′) în ecuația (2.43), obținîndu-se o identitate; derivînd-o în raport cu a_k, găsim identitatea

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial a_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 z}{\partial x_j\, \partial a_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.45}$$

$\left(\text{deoarece în } H,\ a_k \text{ intervine prin intermediul derivatelor } \frac{\partial z}{\partial x_j}\right)$.
Înlocuind funcţiile (2.44) în primele n ecuaţii ale sistemului (2.43′), vom obţine n identităţi; derivînd identitatea $\frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = b_k$ în raport cu variabila t, rezultă identitatea

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_k \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_k \partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

care scăzută din (2.45) conduce la sistemul

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{dx_j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_k \partial x_j} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Or, interpretînd acest sistem ca un sistem algebric în $\frac{dx_j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, deoarece, în baza ipotezei (2.42), determinantul coeficienţilor este diferit de zero, singura soluţie posibilă este soluţia banală

$$\frac{dx_j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n;$$

s-au obţinut astfel primele n ecuaţii ale sistemului canonic. Pentru a obţine şi celelalte ecuaţii ale sistemului canonic, se derivează ecuaţia Hamilton-Jacobi (în care s-a înlocuit z cu φ) în raport cu x_j; se obţine identitatea

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial H}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

şi apoi se scade din ea identitatea obţinută prin derivarea în raport cu t a egalităţii $p_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ [în care $x_1, \ldots, x_n$ se înlocuiesc prin expresiile lor (2.44)]. Deoarece

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \frac{dx_k}{dt}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

operaţia amintită conduce la egalităţile

$$-\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{dx_k}{dt}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}$$

care vor coincide cu ultimele n ecuaţii ale sistemului canonic, dacă se are în vedere că $\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$. ┘

Teorema lui Jacobi are o importanţă practică deosebită deoarece de multe ori integrarea sistemului canonic este o operaţie deosebit de dificilă, pe cînd determinarea unei integrale complete pentru ecuaţia Hamilton-Jacobi se poate realiza uneori uşor (integrala completă se poate obţine uneori căutîndu-se soluţii de o formă particulară a ecuaţiei Hamilton-Jacobi).

Exemplul 10. În cazul exemplului 9 s-a dedus ecuaţia Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} a q^2 = 0;$$

deoarece $W = W(t, q)$, *să căutăm o integrală completă de forma*

$$W(t, q) = f(t) + g(q).$$

Înlocuind în ecuaţie, se obţine egalitatea

$$f'(t) + \frac{1}{2m} g'^2(q) + \frac{1}{2} a q^2 = 0,$$

care va fi verificată dacă, în particular,

$$f'(t) = -\alpha, \quad \frac{1}{2m} g'^2(q) + \frac{1}{2} a q^2 = \alpha;$$

s-au obţinut astfel două ecuaţii diferenţiale simple, care integrate dau

$$f(t) = -\alpha t + \beta, \quad g(q) = \int \sqrt{2\alpha m - m a q^2}\, dq.$$

Se deduce o integrală completă

$$W(t, q) = -\alpha t + \int \sqrt{2\alpha m - m a q^2}\, dq + \beta;$$

aplicînd teorema lui Jacobi, va rezulta că explicitarea funcţiei q din egalitatea

$$-t + \int \frac{m\, dq}{\sqrt{2\alpha m - m a q^2}} = \gamma$$

va reprezenta legea de mişcare a sistemului considerat. Calculînd integrala, se deduce

$$\sqrt{\frac{m}{a}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{2\alpha}}\,q\right)=t+\gamma$$

şi deci

$$q(t)=\sqrt{\frac{2\alpha}{a}}\sin\left[\sqrt{\frac{a}{m}}(t+\gamma)\right];$$

cealaltă funcţie necunoscută a sistemului canonic se obţine scriind

$$p=\frac{\partial W}{\partial q}=\sqrt{2\alpha m-maq^2},$$

în care $q=q(t)$ trebuie înlocuit cu expresia anterioară:

$$p(t)=\sqrt{2\alpha m}\cos\left[\sqrt{\frac{a}{m}}(t+\gamma)\right].$$

11. *Problema lui Kepler sau problema celor două corpuri* (mişcarea unei planete în jurul Soarelui sau a unui electron în cîmpul coulombian al nucleului). În cazul unui atom de hidrogen, sarcina nucleului va fi $+e$, a electronului $-e$, iar energia potenţială este dată de

$$-U=\frac{e}{r},$$

r fiind distanţa de la Soare la planetă sau de la electron la nucleu, $r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$. Utilizînd sistemul sferic de coordonat $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$, $r\geqslant 0$, $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi[$, pentru energia cinetică T se găseşte

$$T=\frac{1}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)=\frac{1}{2}(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+r^2\dot\varphi^2\sin^2\theta)$$

şi, scriind $L=T-U$, vom avea

$$p_1=\frac{\partial L}{\partial\dot r}=\dot r,\ p_2=\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}=r^2\dot\theta,\ p_3=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=r^2\dot\varphi^2\sin^2\theta;$$

hamiltonianul se obţine imediat:

$$H=-L+p_1\dot r+p_2\dot\theta+p^3\dot\varphi=\frac{1}{2}\left(p_1^2+\frac{1}{r^2}p_2^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_3^2\right)-\frac{e}{r}.$$

Calculînd din ecuaţiile sistemului canonic doar ecuaţiile

$$\dot p_3=-\frac{\partial H}{\partial\varphi},\qquad \dot\varphi=\frac{\partial H}{\partial p_3},$$

se obţine $\dot p_3=0$, deci $p_3=p_3^0$ şi $\dot\varphi=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_3^0$; cum

$$r^2\sin^2\theta=r^2-r^2\cos^2\theta=x^2+y^2+z^2-z^2=x^2+y^2,$$

$$\dot\varphi=\frac{d}{dt}\operatorname{tg}\frac{y}{x}=\frac{x\dot y-\dot xy}{x^2+y^2},$$

se deduce

$$x\dot y-\dot xy=A.$$

Alegînd convenabil condiţiile iniţiale, se poate presupune $A=0$, ceea ce va conduce la egalitatea $y=kx$; aşadar, traiectoria mişcării va fi plană.

Vom presupune că planul mişcării este planul $\mathbb{R}^2$, în care originea axelor se află în punctul P_1 (în care se află plasat unul din corpuri); aceasta înseamnă $\theta=\frac{\pi}{2}$, deci

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+\frac{1}{r^2}p_2^2\right)-\frac{e}{r}$$

iar ecuaţia Hamilton-Jacobi va fi

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2-\frac{e}{r}=0.$$

O integrală completă a acestei ecuaţii se poate obţine căutînd-o de forma

$$W(t,r,\varphi)=f(t)+g(r)+h(\varphi);$$

prin înlocuire, se deduce

$$f'(t)+\frac{1}{2}g'^2(r)+\frac{1}{2r^2}h'^2(\varphi)-\frac{e}{r}=0.$$

Această ecuaţie va fi satisfăcută dacă $f(t)=-\alpha t$, $\alpha\in\mathbb{R}$, şi dacă g şi h verifică

$$\frac{1}{2}g'^2(r)+\frac{1}{2r^2}h'^2(\varphi)-\frac{e}{r}=\alpha;$$

scriind ultima ecuaţie sub forma

$$h'^2(\varphi)=-r^2g'^2(r)+2er+2\alpha r^2,$$

aceasta se va verifica pentru $h'(\varphi)=-\beta$ şi deci pentru $g'(r)=\sqrt{2\alpha+\frac{2e}{r}-\frac{\beta^2}{r^2}}$. Prin urmare, o integrală completă se va scrie

$$W(t,r,\varphi)=-\alpha t-\beta\varphi+\int\sqrt{2\alpha+\frac{2e}{r}-\frac{\beta^2}{r^2}}\,dr+\gamma.$$

ceea ce permite aplicarea teoremei lui Jacobi; din egalitățile $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -t_0$, $\frac{\partial W}{\partial \beta} = \varphi_0$, $t_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}$, se deduce

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{2\alpha + \frac{2e}{r} - \frac{\beta^2}{r^2}}}, \quad \varphi - \varphi_0 = \beta \int \frac{dr}{\sqrt{2\alpha + \frac{2e}{r} - \frac{\beta^2}{r^2}}}.$$

A doua egalitate constituie legătura dintre variabilele r și φ (care sînt de fapt coordonatele polare în planul mișcării) care conduce la traiectoria căutată iar prima egalitate descrie modul în care traiectoria este parcursă în timp.

Cu schimbarea de variabilă $\frac{1}{r} \mapsto r$, a doua ecuație se integrează ușor:

$$\varphi - \varphi_0 = -\arcsin\left(\frac{\frac{\beta^2}{e}\frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{e^2}}}\right) = -\arcsin\left(\frac{\frac{p}{r} - 1}{\varepsilon}\right)$$

cu notațiile

$$p = \frac{\beta^2}{e}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{e^2}}.$$

Explicitîndu-l pe r, se găsește

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \sin(\varphi - \varphi_0)},$$

ceea ce înseamnă că traiectoriile vor fi elipse (dacă $\varepsilon <$), parabole (dacă $\varepsilon = 1$) sau hiperbole (dacă $\varepsilon > 1$).

Dacă hamiltonianul H nu conține explicit variabila t, în locul ecuației Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{2.43}$$

se poate considera așa-numita ecuație Hamilton-Jacobi redusă

$$H\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial S}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_n}\right) = h \tag{2.46}$$

în care funcția necunoscută S nu depinde decît de variabilele $x_1, \ldots, x_n$. Pentru a justifica această înlocuire, este suficient să arătăm că din

orice integrală completă a ecuației (2.46) se poate deduce o integrală completă a ecuației (2.43); pentru aceasta, fie

$$S = S(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-1}, h) + a$$

o integrală completă a ecuației (2.46) și să arătăm că

$$z = -ht + S(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-1}, h) + a$$

este o integrală completă a ecuației (2.43). Or, evident, $z \in C^2$, în toate variabilele sale (odată cu S) iar z depinde de $n+1$ parametri arbitrari h, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ și a; în plus, este ușor de verificat că $\det\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial a_k}\right] \neq 0$ dacă $\det\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial a_k}\right] \neq 0$, în primul determinant presupunînd $x_0 = t$ și $a_0 = h$.

De fapt, ecuația redusă (2.46) se poate deduce direct din ecuația (2.43) căutînd soluții de forma

$$W = -ht + S(x_1, \ldots, x_n).$$

2.3.4. Lagrangieni pozitiv omogeni

Să considerăm o varietate V_n dintr-un spațiu $\mathbb{R}^m$, $n < m$, care are proprietatea că elementul de arc ds se poate calcula cu ajutorul egalității

$$ds^2 = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}(\mathbf{x})\, dx_j\, dx_k,$$

unde $[g_{jk}(\mathbf{x})]$ este o matrice pătrată simetrică nesingulară pentru orice $\mathbf{x} \in V_n$, iar forma pătratică $\sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}(\mathbf{x})\, \xi_j\, \xi_k$ este pozitiv definită pentru orice $\mathbf{x} \in V_n$. O astfel de varietate se numește *spațiu Riemann* și vom presupune $g_{jk} \in C^1$. Dacă $x_j = x_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $t \in [t_0, t_1]$, este o curbă γ din V_n, atunci lungimea l a acestei curbe va fi definită cu ajutorul integralei

$$l[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}(\mathbf{x})\, \dot{x}_j \dot{x}_k}\, dt, \quad \dot{x}_j = \frac{dx_j}{dt}, \; j = 1, 2, \ldots, n; \tag{2.47}$$

prin definiție, o curbă $\gamma_0 \subset V_n$ se numește *geodezică* pe V_n, care trece prin punctele $\mathbf{x}(t_0)$ și $\mathbf{x}(t_1)$, dacă γ_0 realizează minimul funcționalei l

definite pin (2.47). În acest mod, determinarea geodezicilor într-un spaţiu Riemann este o problemă variaţională, în care lagrangianul este

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \sqrt{g_{jk}(\mathbf{x})\,\dot{x}_j\,\dot{x}_k}\,; \tag{2.47'}$$

se observă că acest lagrangian are o proprietate importantă şi anume, pentru orice $s > 0$, are loc egalitatea

$$L(\mathbf{x}, s\dot{\mathbf{x}}) = sL(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}).$$

Vom spune că este vorba de un lagrangian pozitiv omogen de grad $p=1$, iar, prin extensie, dacă pentru orice $s>0$ un lagrangian oarecare $L = L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ verifică egalitatea

$$L(t, \mathbf{x}, s\dot{\mathbf{x}}) = s^p\, L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}),$$

vom conveni să spunem că L este un *lagrangian pozitiv omogen de grad* p (p evident va fi un număr real).

Identitatea lui Euler pentru funcţii omogene va conduce la egalitatea

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = pL\,;$$

de aici, se deduce o proprietate importantă a lagrangienilor pozitiv omogeni de grad p şi anume: dacă L este un astfel de lagrangian care în plus este şi independent de t, atunci, dacă $p \neq 1$, acest lagrangian va fi o integrală primă pentru sistemul Euler-Lagrange corespunzător.

Într-adevăr (vezi 2.2.5), deoarece L_* este o integrală primă pentru sistemul Euler-Lagrange, vom avea

$$L_* = L - \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = L - pL = (1-p)\,L$$

şi deci, pentru $p \neq 1$, pe extremale, L va fi constant.

Dacă $p=1$, deoarece punînd $t = t(s)$, $t'(s) > 0$, $s \in [s_0, s_1]$, $t_0 = t(s_0)$, $t_1 = t(s_1)$, avem

$$\int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]\,\mathrm{d}t = \int_{s_0}^{s_1} L\left(\mathbf{x}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{1}{t'}\right) t'\,\mathrm{d}s = \int_{s_0}^{s_1} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\,\mathrm{d}s, \tag{2.48}$$

se deduce că funcţionala $\int_{t_0}^{t_1} L\,\mathrm{d}t$ nu depinde de variabila de integrare (evident, în ipoteza că L nu depinde de t) şi de aceea, se poate face

ipoteza că pentru o alegere convenabilă a parametrului pe extremale să avem $L=h$ (pe extremale); notînd

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} L[\mathbf{x}(u), \dot{\mathbf{x}}(u)]\,\mathrm{d}u$$

în ipoteza că pe extremale $L=h$ dacă parametrul este s, din (2.48) se deduce egalitatea

$$\varphi(t) = h(s - s_0)$$

care va reprezenta legătura căutată între variabilele t şi s [pentru a avea $L=h$ pe extremalele $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$].

Un rezultat important în aplicaţii este

Teorema 2.6. *Dacă lagrangianul L este pozitiv omogen şi nu depinde de t, atunci extremalele funcţionalelor*

$$J[\mathbf{x}] = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t, \quad J_r[\mathbf{x}] = \int_{t_1}^{t_2} L^r\,\mathrm{d}t$$

vor coincide, pentru orice $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0,1\}$.

⌈ Deoarece

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L^r}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L^r}{\partial x_j} = r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L^{r-1}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - rL^{r-1}\frac{\partial L}{\partial x_j} =$$

$$= rL^{r-1}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j}\right] + r(r-1)L^{r-2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t},$$

iar pe extremale $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0$, se deduce că dacă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

atunci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L^r}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L^r}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad ⌋$$

În particular, dacă L este definit prin (2.47'), deci dacă extremalele sînt geodezice, deoarece este cazul unui lagrangian pozitiv omogen

de grad unu, va trebui să determinăm convenabil parametrul pe geodezice, pentru a avea $L=h$ pe aceste curbe; or, pentru $t=s$, s fiind arcul de geodezică, calculat între $t=0$ și t, deci

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\,\dot{x}_j\,\dot{x}_k}\,\mathrm{d}t$$

avem

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\,\dot{x}_j\,\dot{x}_k}=1$$

(deoarece $\mathrm{d}s=\mathrm{d}t$). Așadar, geodezicele vor fi în același timp extremale pentru funcționala

$$J_2[\mathbf{x}]=\int_{t_0}^{t_1} L^2\,[\mathbf{x}(s),\ \dot{\mathbf{x}}(s)]\,\mathrm{d}s=\int_{t_0}^{t}\left[\sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}(\mathbf{x})\,\dot{x}_j\,\dot{x}_k\right]\mathrm{d}t;$$

deoarece

$$\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}_j}=2\sum_{k=1}^{n} g_{jk}\,\dot{x}_k,\quad \frac{\partial L^2}{\partial x_j}=\sum_{l,k=1}^{n}\frac{\partial g_{lk}}{\partial x_j}\,\dot{x}_l\,\dot{x}_k,\qquad j=1,2,\ldots,n,$$

se va obține sistemul Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\sum_{k=1}^{n} g_{jk}\,\dot{x}_k\right)-\frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{n}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_j}\,\dot{x}_l\,\dot{x}_k=0,\qquad j=1,2,\ldots,n.$$

Efectuînd derivarea în raport cu s, deoarece din $g_{jk}=g_{kj}$ se deduce

$$\sum_{j,l=1}^{n}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\,x_j\,x_l=\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k}\right)\dot{x}_j\,\dot{x}_l,$$

sistemul Euler-Lagrange fiind

$$\sum_{k=1}^{n} g_{jk}\,\ddot{x}_k+\sum_{l,k=1}^{n}[l\,k,j]\,\dot{x}_l\,\dot{x}_k=0,\quad j=1,2,\ldots,n,$$

unde $[l\ k,j]$ sînt simbolurile lui Cristoffel de speța întîi

$$[lk,j]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k}-\frac{\partial g_{lk}}{\partial x_j}\right);$$

utilizînd simbolurile lui Cristoffel de speța a doua

$$\begin{Bmatrix} j & & k\\ & l & \end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{n} g^{il}\,[j\,k,i],$$

unde g^{il} este matricea inversă atașată matricei g_{jk}, deci

$$\sum_{l=1}^{n} g^{il}\,g_{lk}=\delta_k^i=\begin{cases}1 \text{ pentru } i=k,\\ 0 \text{ pentru } i\neq k,\end{cases}$$

se obține următoarea formă a sistemului de ecuații diferențiale cu care definesc geodezicele din spațiul Riemann V_n:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_j}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{l,k=1}^{n}\begin{Bmatrix} l & & k\\ & j & \end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}=0,\quad j=1,2,\ldots,n.\qquad(2.49)$$

2.3.5. Distanța geodezică (eikonal)

În cazul funcționalei (2.47), dacă $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$ se înlocuiesc cu geodezicele respective [adică $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$ verifică sistemul (2.49)], se obține, după efectuarea calculelor, minimul distanței dintre punctele $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ și $\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}^1$, aparținînd lui V_n; prin extensie, dacă se calculează valoarea funcționalei

$$J[\mathbf{x}]=\int_{t_0}^{t_1} L[t,\mathbf{x}(t),\ \dot{\mathbf{x}}(t)]\,\mathrm{d}t$$

de-a lungul extremalelor acesteia, se obține *distanța geodezică* sau *eikonalul* acestei funcționale.

Dacă denumirea „distanță geodezică" este împrumutată din geometrie, noțiunea de „eikonal" provine din optică, unde, principiul lui Fermat (care postulează faptul că traiectoria unei raze de lumină într-un mediu oarecare, care pleacă dintr-un punct și ajunge în alt punct al acestui mediu este încît astfel pe ea se obține timpul cel mai scurt), face ca traiectoria unei raze luminoase să fie o extremală, calculînd timpul pe această traiectorie, pentru a ajunge din $\mathbf{x}^0$ în $\mathbf{x}^2$, valoarea obținută se numește *eikonal*. Funcționala, care apare în acest caz, va fi

$$T=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\dot{x}_j^2(s)}}{v(s,\ \mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}})}\,\mathrm{d}s,$$

dacă $v = v(s, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ este viteza de deplasare a luminii în mediul considerat, deoarece $dt = ds/v$.

Distanța geodezică se calculează cu ajutorul extremalelor care trec prin două puncte date $\mathbf{x}^0$ și $\mathbf{x}^1$; dacă aceste puncte sînt situate la o distanță convenabilă unul de celălalt, este posibil să existe o singură extremală care să le unească; este evident că distanța geodezică va depinde de coordonatele punctelor $\mathbf{x}^0$ și $\mathbf{x}^1$ precum și de valorile parametrului pe extremală pentru care se obțin acestea. În ipoteza că $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}$ este variabil, distanța geodezică J va depinde de $2n + 2$ parametri iar dacă $\mathbf{x}^0$ este fixat, vor apărea $n + 1$ variabile (anume $t, x_1, \ldots, x_n$) și $n + 1$ parametri $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$. În baza rezultatelor din 2.3.1 ca funcție de $t, x_1, \ldots, x_n$, distanța geodezică J va verifica ecuația Hamilton-Jacobi (dacă funcția H se poate deduce din funcția L)

$$\frac{\partial J}{\partial t} + H\left(t, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial J}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial J}{\partial x_n}\right) = 0$$

și va fi o integrală completă a acestei ecuații (dacă se verifică ipotezele cerute pentru o astfel de soluție).

Considerațiile anterioare nu sînt aplicabile decît dacă H nu este nul; or în cazul geodezicelor pe o suprafață Riemann avem $H = 0$ și de aceea, ecuația cu derivate parțiale verificată de distanța geodezică trebuie obținută pe altă cale.

Notînd $L = \sqrt{F}$, $F = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}(\mathbf{x})\, \dot{x}_j \dot{x}_k$, deoarece $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{\partial J}{\partial x_j}$,

se deduce

$$p_j = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{n} g_{jk} \dot{x}_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n;$$

cum $\det[g_{jk}] \neq 0$, aplicînd regula lui Cramer, se găsește

$$\frac{\dot{x}_k}{L} = \sum_{j=1}^{n} g^{jk} p_j \tag{2.50}$$

(g^{jk} fiind elementele matricei inverse matricei $[g_{jk}]$). Cum L este pozitiv omogen de grad unu, utilizînd identitatea lui Euler

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = L \quad \text{sau} \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\dot{x}_j}{L} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = 1$$

și ținînd seama pe (2.50) și de faptul că $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial J}{\partial x_j}$, $p_j = \frac{\partial J}{\partial x_j}$, s găsește ecuația cu derivate parțiale

$$\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial J}{\partial x_j} \frac{\partial J}{\partial x_k} = 1$$

care reprezintă ecuația Hamilton-Jacobi în cazul special considerat. De obicei, în aplicații practice, nu se utilizează funcția J ci funcția $\Gamma = J^2$, obținîndu-se ușor ecuația

$$\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_k} = 4\Gamma.$$

În particular, dacă $L^2 = \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j^2$, ecuația Hamilton-Jacobi va fi

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial J}{\partial x_j}\right)^2 = 1 \quad \text{sau} \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}\right)^2 = 4\Gamma.$$

Exerciții

1°. Să se arate că pentru lagrangianul $L = \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + y'^2}$ hamiltonianul este

$$H = \sqrt{x^2 + y^2 - p^2}$$

iar ecuația Hamilton-Jacobi corespunzătoare

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial y}\right)^2 = x^2 + y^2$$

admite integrala completă

$$J = \frac{1}{2} x^2 \sin a - xy \cos a - \frac{1}{2} y^2 \sin a + b;$$

să se deducă de aici extremalele

$$x^2 \cos a + 2xy \sin a - y^2 \cos a = c.$$

2°. Să se arate că dacă se cunoaște hamiltonianul $H = H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$, se poate deduce lagrangianul $L = L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$.

R. Din legătura dintre L şi H se deduce ecuaţia cu derivate parţiale

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - L = H,$$

care este o ecuaţie Clairaut generalizată, a cărei soluţie singulară va defini pe L.

3°. Să se determine L dacă H este:

a) $-\sqrt{p^2+y^2}$; b) $\sqrt{p^2-y^2}$; c) $-\sqrt{y^2+z^2-p^2-q^2}$; d) $y(p^2+q^2)$;

e) $\sqrt{1+p^2+q^2}$; f) $-\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2-p_1^2-p_2^2-\ldots-p_n^2}$.

R. a) $-y\sqrt{1-y'^2}$; b) $y\sqrt{y'^2-1}$; c) $\sqrt{y^2+z^2}\sqrt{1+y'^2+z'^2}$;

d) $\dfrac{1}{4y}(y'^2+z'^2)$; e) $-\sqrt{1-y'^2-z'^2}$; f) $\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\sqrt{\dot{x}_1^2+\ldots+\dot{x}_n^2}$.

4°. Se cer geodezicele pe suprafeţele Liouville, caracterizate prin aceea că elementul de arc se poate scrie

$$ds = \sqrt{f(u)+g(v)}\sqrt{du^2+dv^2}.$$

R. Ecuaţia Hamilton-Jacobi admite o integrală completă de forma

$$J = \int\sqrt{f(u)+a}\,du + \int\sqrt{g(v)-a}\,dv + b, \text{ prin separare de variabile.}$$

5°. Să se arate că în $\mathbb{R}^3$ geodezicele pe suprafeţele, ale căror primă formă fundamentală este

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

se pot obţine cu ajutorul următoarei ecuaţii Hamilton-Jacobi:

$$G\left(\frac{\partial J}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial J}{\partial u}\frac{\partial J}{\partial v} + E\left(\frac{\partial J}{\partial v}\right)^2 = EG - F^2.$$

6°. Să se arate că oricărei ecuaţii diferenţiale de forma

$$y'' = f(x, y, y')$$

i se poate ataşa un lagrangian $L = L(x, y, y')$ a cărui ecuaţie Euler este ecuaţia dată.

R. Scriind ecuaţia Euler sub forma

$$L_{y'y'}\,y'' + L_{y'y}\,y' + L_{y'x} - L_y = 0,$$

scriind f în loc de y'' şi derivînd apoi în raport cu y', se obţine ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întîi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y'\frac{\partial u}{\partial y} + f\frac{\partial u}{\partial y'} + f_{y'}\,u = 0, \quad u = L_{y'y'}$$

cu ajutorul căreia se va obţine L.

7°. Să se determine toate funcţionalele care au ca extremale: a) linii drepte în plan; b) parabolele $y = ax + bx^2$.

R. a) Deoarece $y'' = 0$, în baza exerciţiului 6 se găseşte

$$L(x, y, y') = a(x, y) + y'b(x, y) + \int_0^{y'} (y'-t)\,c(y-tx, t)\,dt,$$

a, b şi c fiind funcţii arbitrare astfel încît $a_y = b_x$.

b) Deoarece $y'' = 2x^{-2}(xy'-y)$, în baza exerciţiului 6 se găseşte

$$L(x, y, y') = a(x, y) + y'b(x, y) + x^{-2}\int_{yx^{-1}}^{y'} (y'-t)\,c(x^{-1}t - x^{-2}y,\ 2x^{-1}y - t)\,dt$$

a, b şi c fiind funcţii arbitrare astfel încît $a_y = b_x$.

CAPITOLUL 3

Calculul variaţiilor

3.1. Introducere

Din problematica vastă a calculului variaţiilor, vom lua în consideraţie numai aspecte legate de posibilitatea aplicării acestei discipline în teoria ecuaţiilor diferenţiale sau cu derivate parţiale; vom avea în vedere probleme de optim ataşate funcţionalelor de forma

$$I[u] = \int_{D_n} L(\mathbf{x}, u, \nabla \mathbf{u})\,\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

unde $L : D_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este cunoscut, fiind o funcţie de clasă C^2 în toate argumentele sale, D_n fiind un domeniu din $\mathbb{R}^n$, mărginit, avînd frontiera ∂D_n cu măsură nulă în $\mathbb{R}^n$ iar $\nabla \mathbf{u} = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

Vom presupune $u : D_n \to \mathbb{R}$, convenabil definit într-o mulţime de funcţii iar calculul variaţiilor determină acele funcţii u care realizează optimul funcţionalei (3.1).

Exemple. 1. *Problema lui Plateau* se referă la determinarea acelei suprafeţe din $\mathbb{R}^3$, avînd ecuaţia $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_2$, şi frontiera γ şi care are aria minimă în raport cu toate suprafeţele din $\mathbb{R}^3$ care se sprijină pe γ [dacă aceste suprafeţe se pot scrie sub forma $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D_2$].

Deoarece aria unei astfel de suprafeţe se poate obţine cu ajutorul egalităţii

$$A = \iint_{D_2} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

problema lui Plateau va fi rezolvată dacă se determină funcţia z cu proprietatea

$$I[z] \leqslant I[u] = \iint_{D_2} \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

cu notaţia $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$, $|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$; comparind cu (3.1), rezultă

$$L(x, y, u, \nabla u) = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}.$$

2. *Ecuaţia coardei vibrante* (înţelegînd prin coardă vibrantă un mediu elastic unidimensional, ale cărui oscilaţii au loc în acelaşi plan xOu) se poate deduce, conform cu principiul lui Hamilton cu ajutorul unei probleme de optim; astfel, în ipoteza că poziţia de echilibru a coardei este dreapta $u = 0$ iar punctul de abscisă x se deplasează numai pe verticală, energia cinetică T a acestei coarde va fi

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x, \quad \rho > 0,$$

dacă $x = 0$ şi $x = l$ sînt capetele coardei în poziţia de echilibru iar ρ este masa coardei raportată la unitatea de lungime, $u = u(t, x)$ fiind deplasarea pe verticală a coardei, faţă de poziţia de echilibru, calculată în punctul x la momentul t. Energia potenţială, fiind proporţională cu alungirea coardei, va fi

$$U(t) = \int_0^l k(x)\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} - 1\right]\mathrm{d}x, \quad k > 0;$$

deci, conform cu principiul lui Hamilton, deplasările coardei în intervalul $[t_1, t_2]$ se realizează astfel încît funcţionala

$$I = \int_{t_1}^{t_2} [T(t) - U(t)]\,\mathrm{d}t$$

să aibă o valoare minimă. În acest mod, ecuaţia coardei vibrante se obţine calculînd minimul integralei

$$I[u] = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \left\{\frac{1}{2}\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - k(x)\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} - 1\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

şi deci este vorba de un caz particular al lui (3.1).

3.2. Condiţii necesare de extrem

3.2.1. Diferenţiala forte

Vom considera două spaţii vectoriale normate X şi Y în care normele se vor nota prin $\|\cdot\|_X$, respectiv $\|\cdot\|_Y$ şi fie $f : A \to Y$, unde $A \subset X$ este o mulţime deschisă.

Se spune că aplicația f este diferențiabilă forte într-un punct $\mathbf{x} \in A$ fixat, dacă pentru orice $\mathbf{h} \in X$, astfel încît $\mathbf{x} + \mathbf{h} \in A$, există o aplicație liniară și mărginită $\mathbf{L}_\mathbf{x}$, $\mathbf{L}_\mathbf{x} : X \to Y$, astfel încît

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_\mathbf{x}\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h}), \tag{3.2}$$

unde $\alpha \in Y$ și este astfel încît

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|_X \to 0} \frac{\|\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h})\|_Y}{\|\mathbf{h}\|_X} = 0. \tag{3.2'}$$

În această situație aplicația $\mathbf{L}_\mathbf{x}\mathbf{h}$ care pentru orice $\mathbf{h} \in X$ este un element din Y se numește diferențiala forte sau *diferențiala Fréchet* a lui $\mathbf{f}$ în punctul $\mathbf{x} \in A$ iar $\mathbf{L}_\mathbf{x}$ însuși se va numi *derivata forte* a lui $\mathbf{f}$ în punctul $\mathbf{x} \in A$.

Exemple. 3. Dacă $\mathbf{f} : A \to Y$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_0$ fiind un element fix din Y (cu alte cuvinte, $\mathbf{f}$ este aplicație constantă de la A la Y), atunci diferențiala forte (Fréchet) există și este nulă, deoarece

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0 = 0 = 0\mathbf{h} + 0$$

și deci $\mathbf{L}_\mathbf{x} = 0$, $\alpha = 0$.

4. Dacă $\mathbf{f} : A \to Y$ este o aplicație liniară și mărginită, adică

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_2),\ \mathbf{f}(a\,\mathbf{x}) = a\mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_Y \leqslant M\|\mathbf{x}\|_X$$

($\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ fiind arbitrari în A, ca și a care este scalar), atunci $\mathbf{f}$ este diferențiabilă în orice punct $\mathbf{x} \in A$; într-adevăr,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{h})] - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{h})$$

și comparînd cu (3.2) se deduce

$$\mathbf{L}_\mathbf{x}\mathbf{h} = \mathbf{f}(\mathbf{h}), \qquad \alpha = 0;$$

și deci, cum $\mathbf{f}$ este aplicație liniară și mărginită, avem $\mathbf{L}_\mathbf{x} = \mathbf{f}$, $\mathbf{x} \in A$.

5. Dacă $\mathbf{f} : A \to Y$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{y}_0$, unde $\mathbf{L} : A \to Y$ este o aplicație liniară și mărginită, deoarece $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}\mathbf{h}$, se deduce imediat că $\mathbf{f}$ este diferențiabilă forte în orice punct $\mathbf{x} \in A$, diferențiala forte fiind egală cu $\mathbf{f}(\mathbf{h})$ în orice punct $\mathbf{x} \in A$.

Dacă $\mathbf{f}$ este diferențiabilă forte în punctul $\mathbf{x} \in A$, atunci diferențiala forte a lui $\mathbf{f}$ în acest punct se notează prin $(d\mathbf{f})(\mathbf{x})$ sau $d\mathbf{f}(\mathbf{x})$, adică

$$(d\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_\mathbf{x}\mathbf{h} \tag{3.3}$$

iar derivata forte în același punct $\mathbf{x} \in A$ se notează prin $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$, deci

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_\mathbf{x}; \tag{3.3'}$$

comparînd (3.3) cu (3.4), rezultă

$$\mathbf{L}_\mathbf{x}\,\mathbf{h} = (d\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}. \tag{3.3''}$$

Este ușor de verificat faptul că diferențiala forte, dacă există, este unic determinată; în caz contrar, ar exista aplicația liniară și mărginită $\mathbf{M}_\mathbf{x}$, $\mathbf{M}_\mathbf{x} : X \to Y$, astfel încît

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_\mathbf{x}\mathbf{h} + \beta(\mathbf{x}, \mathbf{h}),\ \frac{\|\beta(\mathbf{x}, \mathbf{h})\|_Y}{\|\mathbf{h}\|_X} \to 0 \text{ cînd } \|\mathbf{h}\|_X \to 0$$

pentru orice $\mathbf{h} \in X$ cu $\mathbf{x}+\mathbf{h} \in A$, se deduce, utilizînd descompunerea (3.2),

$$\mathbf{L}_\mathbf{x}\mathbf{h} - \mathbf{M}_\mathbf{x}\mathbf{h} = \beta(\mathbf{x}, \mathbf{h}) - \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h})$$

iar în baza proprietăților lui α și β, rezultă

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|_X \to 0} \frac{\|\mathbf{L}_\mathbf{x}\mathbf{h} - \mathbf{M}_\mathbf{x}\mathbf{h}\|_Y}{\|\mathbf{h}\|_X} = 0 \tag{3.4}$$

pentru orice $\mathbf{h} \in X$; dacă ar exista $\mathbf{h}_0 \in X$ astfel încît $\mathbf{L}_\mathbf{x}\mathbf{h}_0 \neq \mathbf{M}_\mathbf{x}\mathbf{h}_0$, pentru orice $\varepsilon > 0$ s-ar putea scrie

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon\|\mathbf{h}_0\|_X}\|\mathbf{L}_\mathbf{x}\mathbf{h}_0 - \mathbf{M}_\mathbf{x}\mathbf{h}_0\|_Y = c > 0$$

(deoarece $\mathbf{L}_\mathbf{x}\mathbf{h}_0 - \mathbf{M}_\mathbf{x}\mathbf{h}_0 \neq 0$ înseamnă $\|\mathbf{L}_\mathbf{x}\mathbf{h}_0 - \mathbf{M}_\mathbf{x}\mathbf{h}_0\|_Y > 0$ iar prin ipoteză $\|\mathbf{h}_0\|_X > 0$), deci, notînd $\mathbf{h} = \varepsilon\mathbf{h}_0$, se deduce

$$\frac{1}{\|\varepsilon_0\mathbf{h}\|_X}\|\mathbf{L}_\mathbf{x}(\varepsilon\mathbf{h}_0) - \mathbf{M}_\mathbf{x}(\varepsilon\mathbf{h}_0)\|_Y = \frac{1}{\|\mathbf{h}_0\|_X}\|\mathbf{L}_\mathbf{x}(\mathbf{h}) - \mathbf{M}_\mathbf{x}(\mathbf{h})\|_Y = c > 0,$$

ceea ce contrazice (3.4), deoarece, dacă $\varepsilon \to 0$, neapărat $\|\mathbf{h}\|_X = \|\varepsilon\mathbf{h}_0\|_X = \varepsilon\|\mathbf{h}_0\|_X \to 0$.

3.2.2. Diferențiala slabă

Vom presupune $\mathbf{f}$ definit ca în 3.2.1 și vom calcula

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h})|_{t=0} = \lim_{t \to 0}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{t} \tag{3.5}$$

într-un punct $\mathbf{x} \in A$ pentru orice $\mathbf{h} \in X$, astfel încît $\mathbf{x} + t\,\mathbf{h} \in A$, t fiind scalar real. Limita este înțeleasă în sensul normei din Y: dacă $\mathbf{A}$ este limita în cauză, înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate găsi $\delta > 0$ astfel încît

$$\left\| \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{t} - \mathbf{A} \right\|_Y < \varepsilon \text{ îndată ce } |t| < \delta.$$

Dacă limita (3.5) există, se notează prin $(D\mathbf{f})(\mathbf{x}, \mathbf{h})$, adică

$$(D\mathbf{f})(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{h})\Big|_{t=0} \tag{3.5'}$$

și se numește *diferențiala slabă* sau *diferențiala Gâteaux* a lui $\mathbf{f}$ în punctul $\mathbf{x}$ relativ la creșterea $\mathbf{h}$.

În general, diferențiala slabă $(D\mathbf{f})(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ nu este liniară în raport cu $\mathbf{h}$, dar dacă această diferență este liniară în raport cu $\mathbf{h}$. și se scrie sub forma

$$(D\mathbf{f})(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \mathbf{f}'_s(\mathbf{x})\,\mathbf{h}, \tag{3.5''}$$

unde $\mathbf{f}'_s(\mathbf{x})$ este un operator liniar și mărginit ($\mathbf{f}'_s(\mathbf{x}) : A \to Y$), atunci $\mathbf{f}'_s(\mathbf{x})$ se numește *derivata slabă* (sau *derivata în sensul lui Gâteaux*) a aplicației $\mathbf{f}$ în punctul $\mathbf{x}$. În legătură cu derivata slabă $(D\mathbf{f})(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ se poate face precizarea că deși inițial aceasta nu este o aplicație liniară în raport cu $\mathbf{h}$, totuși în anumite ipoteze suplimentare, se poate obține și egalitatea (3.5''). Este ușor de stabilit că dacă $\mathbf{f}$ este diferențiabilă forte în punctul $\mathbf{x} \in A$, atunci ea este diferențiabilă Gâteaux în acest punct iar derivata slabă $\mathbf{f}'_s(\mathbf{x})$ există și este egală cu derivata forte $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$. Într-adevăr, scriind $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{h})$, prin înlocuirea lui $\mathbf{h}$ prin $t\,\mathbf{h}$, în baza liniarității aplicației $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$, se găsește

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = t\mathbf{f}'(\mathbf{x})\,\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{x}, t\,\mathbf{h}),$$

de unde se deduce

$$(D\mathbf{f})(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{h})\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{f}(\mathbf{x}) + t\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{x}, t\,\mathbf{h})]\Big|_{t=0} = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h},$$

deoarece

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0,\ \frac{\partial}{\partial t}\alpha(\mathbf{x}, t\mathbf{h})\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\alpha(\mathbf{x}, t\,\mathbf{h}) - \alpha(\mathbf{x}, 0)}{t} = 0,$$

ultima egalitate bazîndu-se pe (3.2'), din care se deduce $\alpha(\mathbf{x}, 0) = 0$ și

$$0 = \lim_{t\to 0}\frac{\|\alpha(\mathbf{x}, t\mathbf{h})\|_Y}{\|t\,\mathbf{h}\|_X} = \frac{1}{\|\mathbf{h}\|_X}\lim_{t\to 0}\frac{\|\alpha(\mathbf{x}, t\mathbf{h})\|_Y}{t}.$$

Așadar, s-a obținut egalitatea

$$(D\mathbf{f})(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\,\mathbf{h},$$

ceea ce înseamnă $\mathbf{f}'_s(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})$. Reciproc, se poate arăta că dacă derivata slabă $\mathbf{f}'_s(\mathbf{x})$ a aplicației $\mathbf{f}$ există într-o vecinătate a punctului $\mathbf{x}_0 \in A$ și este continuă în $\mathbf{x}_0$, atunci $\mathbf{f}$ admite în $\mathbf{x}_0$ o derivată forte $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ [$= \mathbf{f}'_s(\mathbf{x})$].

Față de diferențiala forte, diferențiala slabă are avantajul că poate fi uneori calculată efectiv cu destulă ușurință.

Exemplul 6. Fie $X = C([a, b])$ și $Y = \mathbb{R}$ iar

$$f(x) = \int_a^b x^2(t)\,dt;$$

dacă $h \in X$, atunci

$$f(x + h) = \int_a^b [(x + h)(t)]^2\,dt = \int_a^b x^2(t)\,dt + \int_a^b h^2(t)dt + 2\int_a^b (xh)(t)\,dt$$

și deci

$$f(x + h) - f(x) = 2\int_a^b x(t)\,h(t)\,dt + \int_a^b h^2(t)\,dt;$$

comparînd cu (3.2), găsim

$$L_x h = 2\int_a^b x(t)\,h(t)\,dt,\quad \alpha(x, h) = \int_a^b h^2(t)\,dt$$

și este evident că $L_x h$ este o aplicație liniară de la X la Y (pentru x fixat). Deoarece

$$\frac{\|\alpha(x, h)\|_Y}{\|h\|_X} = \frac{\left|\int_a^b h^2(t)\,dt\right|}{\|h\|_X} \leqslant \frac{\sup h^2(t)}{\|h\|_X} \leqslant \frac{\|h\|_X^2}{\|h\|_X} = \|h\|_X,$$

este evident că (3.2') se verifică, ceea ce înseamnă că aplicația considerată este diferențiabilă forte în orice punct $x \in X$ iar diferențiala forte este egală cu

$$f'(x)h = 2\int_a^b x(t)\,h(t)\,dt.$$

Calculînd direct diferențiala slabă, avem

$$f(x+sh)=\int_a^b (x^2+2s\,xh+s^2h^2)\,\mathrm{d}l$$

și cum $x = x(l)$, $h = h(l)$ sînt funcții continue pe $[a, b]$, derivata în raport cu s se poate calcula direct sub semnul integralei; deci

$$(\mathrm{D}f)(x, h) = \int_a^b (2xh + 2sh^2)\Big|_{s=0} \mathrm{d}l = \int_a^b 2xh\,\mathrm{d}l$$

și se obține egalitatea

$$(\mathrm{D}f)(x, h) = 2\int_a^b x(l)\,h(l)\,\mathrm{d}l.$$

Existența diferențialei forte are drept consecință posibilitatea aproximării creșterii aplicației $\mathbf{f}$ [calculată în punctul $\mathbf{x} \in A$, relativă la creșterea $\mathbf{h} \in X$ și definită prin $(\Delta\mathbf{f})(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$] prin $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\,\mathbf{h}$; așadar în primă aproximație, se poate scrie

$$(\Delta\mathbf{f})(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \approx \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}.$$

3.2.3. Condiții necesare de extrem

Vom presupune aplicația $\mathbf{f}$ o funcțională reală, adică dacă $\mathbf{f}: A \subset X \to Y$, atunci $Y \subset \mathbb{R}$, ceea ce are drept consecință posibilitatea comparării valorilor lui $\mathbf{f}$; se spune că funcționala $\mathbf{f}$ admite un minim în $\mathbf{x}_0 \in A$, dacă $(\Delta\mathbf{f})(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) \geqslant 0$ pentru orice $\mathbf{h} \in X$, astfel încît $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ [$B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ fiind sfera deschisă de rază $\varepsilon > 0$ cu centrul în $\mathbf{x}_0$]. Dacă se obține inegalitatea inversă, evident este vorba de un punct de maxim.

Legătura dintre punctele de extrem pentru funcționale reale și diferențiala forte este dată prin

Teorema 3.1. *Pentru ca funcționala reală diferențiabilă* $\mathbf{f}$ *să admită un extrem în punctul* $\mathbf{x}_0 \in A$, *este necesar ca în acest punct diferențiala forte* $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{h}$ *să fie nulă pentru orice* $\mathbf{h} \in X$.

⌈ Se poate scrie

$$(\Delta\mathbf{f})(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}).$$

Dacă în punctul $\mathbf{x}_0 \in A$, care prin ipoteză este un punct de extrem pentru $\mathbf{f}$, am avea $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} > 0$ pentru un $\mathbf{h} \in X$ și $|\alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})| < \varepsilon \|\mathbf{h}\|_X$ cu $\varepsilon \to 0$ determinat, se deduce

$$(\Delta\mathbf{f})(\mathbf{x}_0, t\mathbf{h}) = t\,\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{x}_0, t\,\mathbf{h})$$

și cum dacă t este suficient de mic în valoare absolută, vom avea $(\Delta\mathbf{f})(\mathbf{x}_0, t\mathbf{h}) < 0$ pentru $t < 0$ sau $(\Delta\mathbf{f})(\mathbf{x}_0, t\mathbf{h}) > 0$ pentru $t > 0$, creșterea lui $\mathbf{f}$ în punctul $\mathbf{x}_0$ nu poate avea semn constant, ceea ce contrazice ipoteza. Analog nici ipoteza $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} < 0$ nu poate fi luată în considerație, deci $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = 0$, oricare ar fi $\mathbf{h} \in X$. ⌋

Dacă se folosește diferențiala slabă, condiția necesară de extrem al funcționalei $\mathbf{f}$ în punctul $\mathbf{x}_0 \in A$ va fi

$$(\mathrm{D}\mathbf{f})(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = 0 \tag{3.6}$$

pentru orice $\mathbf{h} \in X$. Într-adevăr, utilizînd notația

$$g(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$$

în ipoteza $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} \in A$, g va fi o funcție de variabila reală t, definită în vecinătatea originii $t = 0$ și astfel încît, pentru orice $\mathbf{h} \in X$, $g(0)$ fiind extrem. Prin urmare, în mod necesar, $g'(0) = 0$, adică

$$g'(0) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\,\mathbf{h})\Big|_{t=0} = (\mathrm{D}\mathbf{f})(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = 0.$$

Este ușor de verificat că (3.6) conduce la teorema 3.1, dacă $\mathbf{f}$ este diferențiabilă forte în $\mathbf{x}_0 \in A$.

3.3. Lemele fundamentale ale calculului variațiilor

Pentru a putea aplica funcționalelor de forma (3.1) considerațiile din 3.2 în vederea obținerii unor condiții necesare de extrem scrise sub o formă mai accesibilă, sînt necesare cîteva rezultate din teoria integralelor Riemann.

Teorema 3.2 (*lema generală a calculului variațional*). *Dacă* f, $h_1, \ldots, h_m$ *sînt elemente ale spațiului Hilbert* $L_2(D_n)$ *iar* g *este un element oarecare din* $L_2(D_n)$ *care verifică egalitățile*

$$(g, h_j) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m,$$

și dacă în plus $(f, g) = 0$, *atunci* f *este o combinație liniară a elementelor* $h_1, h_2, \ldots, h_m$.

⌈ Fără a se micșora generalitatea, lementele $h_1, \ldots, h_m$ se pot presupune liniar independente (în caz contrar, se elimină din mulțimea $\{h_1, \ldots, h_m\}$ elementele care se prezintă sub formă de combinații liniare ale elementelor rămase, ceea ce conduce la înlocuirea lui m

printr-un număr $m' < m$, $m' = 0, 1, \dots$) şi apoi aplicînd procedeul de ortogonalizare se pot presupune verificate egalităţile

$$(h_j, h_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, \dots, m.$$

Să arătăm că este posibil să determine numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_m$ astfel încît $g_0 \in L_2(D_n)$,

$$g_0 = f - \sum_{j=1}^{m} a_j h_j$$

să fie ortogonal pe $h_1, h_2, \dots, h_m$; într-adevăr, din condiţiile $(g_0, h_j) = 0$, $j = 1, \dots, m$, rezultă imediat $a_j = (f, h_j)$. Prin urmare, se poate considera g_0 în locul lui g şi atunci din ipoteza $(f, g_0) = 0$ se deduce

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{m} a_j h_j \right\|^2 = \left(f - \sum_{j=1}^{m} a_j h_j, g_0 \right) = (f, g_0) - \sum_{j=1}^{m} a_j (h_j, g_0) = 0,$$

adică $f - \sum_{j=1}^{m} a_j h_j = 0$ (egalitate aproape peste tot). ┘

Teorema 3.3 (*lema lui Lagrange sau lema fundamentală a calculului variaţiilor*). *Dacă $f \in C(\bar{D}_n)$ iar $g \in C^k(\bar{D}_n)$, g împreună cu derivatele parţiale $\frac{\partial^m g}{\partial x^m}$, $|m| \leqslant k$ anulîndu-se pe frontiera lui D_n, atunci, din condiţia*

$$\int_{D_n} f(\mathbf{x}) \, g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \tag{3.7}$$

pentru orice g verificînd ipotezele amintite, rezultă $f(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \bar{D}_n$.

┌ Să presupunem $\mathbf{x}_0 \in D_n$, astfel încît $f(\mathbf{x}_0) > 0$; cum f este continuă, avem $f(\mathbf{x}) > 0$, dacă $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0)$, $r > 0$ fiind suficient de mic, iar $B_r(\mathbf{x}_0)$ fiind sfera deschisă de rază r cu centrul în $\mathbf{x}_0$. Luîndu-l pe g de forma

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} (r^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2)^{k+1} & \text{pentru } \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0), \\ 0 & \text{pentru } \mathbf{x} \notin B_r(\mathbf{x}_0), \end{cases}$$

se verifică ipotezele teoremei pentru g şi atunci

$$\int_{D_n} f(\mathbf{x}) \, g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x}) \, (r^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2)^{k+1} \, d\mathbf{x} > 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza. ┘

Teorema 3.4 (*lema lui P. du Bois Reymond*). *Dacă $f \in C(\bar{D}_n)$ şi dacă pentru orice funcţie $g \in C^m(\bar{D}_n)$, nulă împreună cu toate derivatele parţiale de ordin $\leqslant m - 1$, pe frontiera lui D_n avem*

$$\int_{D_n} f(\mathbf{x}) \frac{\partial^m g(\mathbf{x})}{\partial x^m} \, d\mathbf{x} = 0, \tag{3.7'}$$

rezultă f un polinom de grad cel mult $m - 1$.

┌ Notînd

$$g_1 = \frac{\partial^m g}{\partial x^m} \left(= \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_n} g}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} \right),$$

din (3.7') se deduce condiţia de ortogonalitate $(f, g_1) = 0$; pe de altă parte, utilizînd formula Gauss-Ostrogradski, se deduc şi egalităţile

$$(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, g_1) = 0, \quad k_1 + \dots + k_n < m$$

deoarece g şi toate derivatele sale parţiale de ordin $< m$ sînt nule pe ∂D_n; teorema 3.2 arată că f este o combinaţie liniară a elementelor $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, cu $k_1 + \dots + k_n < m$, deci este un polinom de grad cel mult $m - 1$, egalitatea avînd loc peste tot, f fiind continuă. ┘

Teorema 3.4 a fost demonstrată iniţial pentru $n = 1$ şi $m = 1$; deci dacă $f \in C([a, b])$ şi dacă pentru orice $g \in C^1([a, b])$ astfel încît $g(a) = g(b) = 0$ avem

$$\int_a^b f(x) \, g'(x) \, dx = 0,$$

atunci f este o constantă în $[a, b]$.

3.4. Ecuaţia Euler-Ostrogradski

3.4.1. Deducerea ecuaţiei Euler-Ostrogradski

Vom considera funcţionala (3.1) în care L este o funcţie de clasă C^2 în toate argumentele; ne interesează funcţiile $u \in C^1(\bar{D}_n)$, $u \in C^2(D_n)$, unde D_n este un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^n$ avînd frontiera ∂D_n suficient de regulată (suprafaţa ∂D_n se presupune că admite plan tan-

gent continuu, exceptînd eventual un număr finit de varietăţi, avînd măsura $n-1$ dimensională nulă) care realizează un extrem pentru integrala

$$I[u]=\int_{D_n} L(\mathbf{x}, u, \nabla u)\,d\mathbf{x}, \tag{3.1}$$

dacă sînt cunoscute valorile lui u pe ∂D_n,

$$u(\mathbf{x})|_{\partial D_n}=f_1(\mathbf{x}), \tag{3.8}$$

f_1 fiind o funcţie cunoscută pe ∂D_n, aceeaşi pentru toate funcţiile u care intervin în (3.1).

Conform cu rezultatele din 3.2, dacă u este un element din mulţimea admisibilă A de funcţii în care se caută acest extrem [evident, în acest caz, mulţimea admisibilă A va fi formată din funcţiile de clasă C^1 pe $\bar{D}_n$, de clasă C^2 în D_n şi care verifică (3.8)], atunci u va verifica şi egalitatea $(\mathrm{D}I)(u, h)=0$ pentru orice $h\in C^1(\bar{D}_n)$, $h\in C^2(D_n)$, astfel încît $u+th\in A$, pentru $t\in\mathbb{R}$ arbitrar, $(\mathrm{D}I)(u,h)$ fiind diferenţiala slabă a funcţionalei (3.1):

$$(\mathrm{D}I)(u,h)=\frac{\partial}{\partial t}I[u+th]|_{t=0};$$

or pentru $u+t\,h\in A$ trebuie să se verifice (3.8): $(u+th)|_{\partial D_n}=f_1$ şi deoarece $(u+th)|_{\partial D_n}=u|_{\partial D_n}+th|_{\partial D_n}$ iar u verifică (3.8), se deduce

$$h|_{\partial D_n}=0. \tag{3.8'}$$

Deoarece

$$I[u+th]=\int_{D_n}L(\mathbf{x}, u+th, u+t\,\nabla h)\,d\mathbf{x} \tag{3.9}$$

în ipotezele noastre (L, u şi h sînt funcţii de clasă C^2), se poate calcula derivata în raport cu t direct sub semnul integralei; notînd pentru uşurinţă $\nabla u=(u_1,\ldots,u_n)$, adică $u_j=\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $j=1,2,\ldots,n$, avem

$$(\mathrm{D}I)(u,h)=\int_{D_n}\left(\frac{\partial L}{\partial u}h+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial u_j}h_j\right)dx, \tag{3.9'}$$

unde $h_j=\dfrac{\partial h}{\partial x_j}$, $j=1,2,\ldots,n$. Se observă că în expresia lui $(\mathrm{D}I)(u,h)$ apare atît h cît şi derivatele sale parţiale, dar prin utilizarea formulei Gauss-Ostrogradski (ceea ce este posibil în ipoteza $L\in C^2$, deci $\dfrac{\partial L}{\partial u_j}\in C^1$) acest neajuns dispare; scriind $\mathrm{D}I$ sub forma echivalentă

$$(\mathrm{D}I)(u,h)=\int_{D_n}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial u_j}h\right)\right]d\mathbf{x}+\int_{D_n}\left[\frac{\partial L}{\partial u}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial u_j}\right)\right]h\,d\mathbf{x},$$

se constată că primei integrale i se poate aplica formula amintită. Vom avea, dacă $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ este versorul normalei exterioare la ∂D_n:

$$\int_{D_n}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial u_j}\right)\right]d\mathbf{x}=\int_{\partial D_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial u_j}\nu_j\right)h\,d\sigma,$$

ceea ce arată că diferenţiala slabă a funcţionalei (3.1), în ipotezele impuse, se poate scrie sub forma

$$(\mathrm{D}I)(u,h)=\int_{D_n}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial u_j}\nu_j\right]h\,d\sigma+\int_{D_n}[L]_u h\,d\mathbf{x} \tag{3.9''}$$

prin folosirea notaţiei

$$[L]_u=\frac{\partial L}{\partial u}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial u_j}\right). \tag{3.9'''}$$

Spre deosebire de forma (3.9′) a diferenţialei slabe, în forma (3.9″) apare doar h. În baza condiţiei (3.8′), (3.9″) se scrie sub forma mai simplă

$$(\mathrm{D}I)(u,h)=\int_{D_n}[L]_u h\,d\mathbf{x} \tag{3.10}$$

şi utilizînd condiţia necesară de extrem, va trebui să avem

$$\int_{D_n}[L]_u\,h\,d\mathbf{x}=0 \tag{3.10'}$$

pentru orice $h \in C^1(\bar{D}_n)$, $h \in C^2(D_n)$ care este nul pe ∂D_n. Deoarece funcţia u care realizează extremul este presupusă găsită, evident $[L]_u$ va fi o funcţie continuă pe $\bar{D}_n$ şi folosind notaţiile

$$[L]_u = f(\mathbf{x}), \; h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}),$$

obţinem din (3.10′), utilizînd lema lui Lagrange (teorema 3.3), următoarea condiţie necesară de extrem:

Teorema 3.5. *Funcţiile $u \in C^1(\bar{D}_n)$, $u \in C^2(D_n)$ care verifică (3.8) pot realiza un extrem pentru funcţionala (3.1) numai dacă verifică egalitatea*

$$[L]_u = 0, \; \text{adică} \; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial u_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0. \qquad (3.11)$$

Egalitatea (3.11) este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea pentru funcţia căutată $u = u(\mathbf{x})$; această ecuaţie se scrie explicit sub forma

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial u_j \partial u_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial u_j \partial u} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial u_j \partial x_j} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \qquad (3.11')$$

şi se numeşte *ecuaţia Euler-Ostrogradski* ataşată funcţionalei (3.1).

Exepmle. 7. În cazul problemei lui Plateau (vezi exemplul 1) avem

$$L = L(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

dacă se folosesc notaţiile lui Monge; ecuaţia Euler-Ostrogradski corespunzătoare va fi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = 0,$$

adică, efectuînd derivările,

$$\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

8. În cazul ecuaţiei coardei vibrante avem

$$L\left(x, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - k(x)\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x^2}\right)^2} - 1\right];$$

în cazul micilor oscilaţii ,se pot neglija puterile de forma $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n$ cu $n > 2$ şi atunci, deoarece $\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 + \ldots$, în locul ultimei paranteze din expresia lui L se poate scrie doar termenul $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, adică

$$L\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}k(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

Ecuaţia Euler-Ostrogradski corespunzătoare va fi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right] = 0,$$

adică

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0.$$

În ipoteza $\rho(x) = \rho_0$, $k(x) = k_0$, $\rho_0, k_0 \in \mathbb{R}$, $\rho_0 > 0$, $k_0 > 0$, notînd $a^2 = \frac{k_0}{\rho_0}$, se obţine ecuaţia mai simplă

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

care de obicei se numeşte *ecuaţia coardei vibrante*.

9. În cazul funcţionalei

$$I[u] = \int_{D_n}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right]d\mathbf{x},$$

numită *integrala lui Dirichlet*, avem $L = u_1^2 + \ldots + u_n^2$ şi ecuaţia Euler-Ostrogradski corespunzătoare va fi

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(2u_1) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}(2u_n) = 0,$$

adică va coincide cu ecuaţia Laplace din $\mathbb{R}^n$;

$$\Delta_n u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

3.4.2. Extremalele funcţionalei (3.1)

Din consideraţiile anterioare rezultă că nu orice soluţie a ecuaţiei Euler-Ostrogradski (3.11) va realiza o valoare extremă pentru funcţionala (3.1), deoarece ecuaţia (3.11) se prezintă ca o condiţie necesară de extrem; vom conveni să numim *extremale* ale funcţionalei (3.1) soluţiile ecuaţiei Euler-Ostrogradski (3.11) corespunzătoare acestei funcţionale. Prin urmare, dacă funcţionala (3.1) admite un extrem (în ipotezele din 3.4.1), atunci acest extrem trebuie căutat numai printre extremalele acestei funcţionale, ceea ce evident reprezintă un avantaj esenţial în studiul acestor probleme; odată determinată funcţia care realizează acest extrem, mai trebuie verificată şi condiţia la frontieră (3.8) care poartă numele de *prima condiţie la limită*. Această condiţie la limită ataşată ecuaţiei Euler-Ostrogradski (3.11) defineşte o problemă Dirichlet iar nu pentru orice ecuaţie cu derivate parţiale condiţia (3.8) este o condiţie naturală şi de aceea trebuie văzut ce se întîmplă dacă această restricţie nu apare. Cu alte cuvinte, în consideraţiile din 3.4.1 se presupune h arbitrar (evident cu respectarea condiţiilor de regularitate solicitate de calculele efectuate) dar verificînd restricţia (3.8'); în lipsa acesteia, toate raţionamentele din 3.4.1 rămîn valabile, cu diferenţa că în locul condiţiei necesare de extrem (3.10') apare condiţia

$$\int_{D_n}[L]_u h\,\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{\partial D_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial u_j}\nu_j\right)h\,\mathrm{d}\sigma=0. \tag{3.9'}$$

Or, cum h este arbitrar, egalitatea anterioară va trebui să fie verificată şi pentru orice h care verifică (3.8') şi deci se va obţine iarăşi condiţia necesară de extrem (3.11); aceasta înseamnă că în (3.9''), oricare ar fi h, u trebuie să fie soluţie a ecuaţiei Euler-Ostrogradski (3.11) (ceea ce justifică denumirea de extremale ale funcţionalei (3.1) dată soluţiilor acestei ecuaţii) şi din (3.9'') se va deduce condiţia suplimentară

$$\int_{D_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial u_j}\nu_j\right)h\,\mathrm{d}\sigma=0 \tag{3.9$_1''$}$$

care trebuie verificată pentru ca u să realizeze efectiv un extrem pentru funcţionala (3.1). Or, aplicînd lui (3.9$_1''$) lema lui Lagrange, se deduce condiţia

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial u_j}\nu_j=0 \quad \text{pe } \partial D_n \tag{3.12}$$

care va înlocui condiţia la limită (3.8); condiţia (3.12) poartă numele de condiţie la limită naturală ataşată ecuaţiei Euler-Ostrogradski (3.11) şi apare ca o condiţie de ortogonalitate între

$$\left(\frac{\partial L}{\partial u_1},\ \ldots,\ \frac{\partial L}{\partial u_n}\right) \quad \text{şi} \quad (\nu_1,\ \ldots,\ \nu_n).$$

Exemplul 10. În cazul particular

$$L=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right]-a(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_1}$$

condiţia (3.12) se transformă în egalitatea

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_j-a(\mathbf{x})\,\nu_1=0 \quad \text{pe } \partial D_n,$$

adică, deoarece $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\nu_j$, se deduce, cu notaţia $a(\mathbf{x})\nu_1=b(\mathbf{x})$,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=b(\mathbf{x}) \qquad \text{pe } \partial D_n, \tag{3.12'}$$

condiţie care împreună cu ecuaţia Euler-Ostrogradski definesc o *problemă Neumann*.

Evident, condiţiile (3.8) respectiv (3.12') pot fi impuse soluţiilor unor ecuaţii cu derivate parţiale indiferent dacă sînt sau nu ecuaţii Euler-Ostrogradski pentru anumite funcţionale.

3.4.3. Invarianţa ecuaţiei Euler-Ostrogradski

Vom presupune că în locul variabilelor independente $x_1, \ldots, x_n$ utilizate anterior, se introduc variabile independente noi, pe care le vom nota $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, legătura dintre variabilele vechi şi noi făcîndu-se prin

$$\bar{x}_j=\bar{x}_j(x_1,\ \ldots,\ x_n), \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{3.13}$$

în ipoteza posibilităţii determinării transformării inverse lui (3.13),

$$x_j=x_j(\bar{x}_1,\ \ldots,\ \bar{x}_n), \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3.13'}$$

Mai precis, dacă $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D_n$ atunci $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ definește un domeniu $\bar{D}_n \subset \mathbb{R}^n$, prin (3.13) (sau 3.13') realizîndu-se o corespondență biunivocă între punctele acestor domenii, ceea ce implică, dacă $\bar{x}_j \in C^1(D_n)$, condiția

$$\bar{J} = \frac{\partial(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0 \text{ în } D_n;$$

notînd cu J determinantul funcțional al transformării (3.13'), adică

$$J = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}, \quad \bar{\mathbf{x}} \in \bar{D}_n,$$

avem $J \cdot \bar{J} = 1$. Vom presupune în plus funcțiile din (3.13) și (3.13') de clasă C^2 în D_n, respectiv $\bar{D}_n$.

Plecînd de la funcționala (3.1), prin aplicarea transformării (3.13') se obține

$$I[u] = \int_{D_n} L(\mathbf{x}, u, \nabla u)\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\bar{D}_n} \bar{L}(\bar{\mathbf{x}}, u, \bar{\nabla} u)\, \mathrm{d}\bar{\mathbf{x}},$$

unde

$$\bar{L}(\bar{\mathbf{x}}, u, \bar{\nabla} u) = L\left[\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}), u(\bar{\mathbf{x}}), \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_k}\right] J; \tag{3.14}$$

în ipoteza $h|_{\partial D_n} = 0$, $h|_{\partial \bar{D}_n} = 0$, calculînd $(\mathrm{D}I)$, (u, h) utilizînd cele două forme ale lui I, în baza lui (3.10') se deduce egalitatea

$$\int_{D_n} h[L]_u \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\bar{D}_n} h[\bar{L}]_u \mathrm{d}\bar{\mathbf{x}}$$

sau, revenind în ultima integrală la variabilele inițiale $\mathbf{x}$, găsim

$$\int_{D_n} h[L]_u \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{D_n} h[\bar{L}]_u \bar{J}\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

egalitate care, scrisă sub forma $\int_{D_n} ([L]_u - [\bar{L}]_u \bar{J}) h \mathrm{d}\mathbf{x} = 0$, nu este posibilă (deoarece h este arbitrar) decît dacă

$$[L]_u = [\bar{L}]_u \bar{J}. \tag{3.14'}$$

Egalitatea astfel obținută se numește *relația de invarianță a ecuației Euler-Ostrogradski* și are numeroase aplicații.

3.4.4. Laplacianul în sisteme oarecare de coordonate

O aplicație importantă a egalității (3.14') se referă la posibilitatea transcrierii operatorului lui Laplace Δ_n din $\mathbb{R}^n$, care într-un sistem cartezian de coordonate ortogonale, se scrie

$$\Delta_n u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

în orice alt sistem de coordonate. Pentru aceasta, vom face observația (vezi și expemplul 9) că în coordonate carteziene avem

$$\Delta_n u = [L]_u,$$

unde

$$L = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right].$$

Pentru a găsi Δ_n în orice alt sistem de coordonate, este suficient să se utilizeze egalitatea (3.14'). Pentru a găsi o formă cît mai comodă pentru Δ_n, vom calcula mai întîi elementul de arc $\mathrm{d}s$ utilizînd (3.13'):

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x_1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x_n)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_j} \mathrm{d}\bar{x}_j\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}_j} \mathrm{d}\bar{x}_j\right)^2 =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk} \mathrm{d}\bar{x}_j \mathrm{d}\bar{x}_k$$

cu notațiile

$$g_{jk} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Funcțiile g_{jk} formează o matrice pătrată $[g_{jk}]$ nesingulară, deoarece se verifică ușor, utilizînd regula de înmulțire a doi determinanți, că

$$g = \det[g_{jk}] = J^2, \quad J = \sqrt{g},$$

J fiind determinantul funcțional al transformării (3.13') care prin ipoteză este nenul; notînd cu g^{jk} elementele matricei inverse matricei $[g_{jk}]$, se deduce

$$g^{jk} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_l},$$

deoarece

$$\sum_{k=1}^{n} g_{jk}g^{km} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_j}\frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k}\sum_{l'=1}^{n}\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_{l'}}\frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_{l'}} =$$

$$= \sum_{l,l'=1}^{n}\frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_j}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k}\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_{l'}}\frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_{l'}} = \sum_{l,l'=1}^{n}\delta_{ll'}\frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_j}\frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_{l'}} = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_j}\frac{\partial \bar{x}_m}{\partial x_l} = \delta_{jm}.$$

Pe de altă parte, calculînd L în coordonatele $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, se găsește

$$L = -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_j}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_k},$$

deoarece

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_j}\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_1}\right)^2 = \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_j}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_k}\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_1}\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_1}$$

și analog pentru celelalte derivate parțiale; așadar,

$$\bar{L} = -\frac{1}{2}\sqrt{g}\sum_{j,k=1}^{n} g^{jk}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_j}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_k}$$

iar egalitatea (3.14′) în acest caz se scrie

$$\Delta_n u = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}\left(\sqrt{g}\, g^{jk}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_k}\right). \qquad (3.15)$$

Aceasta este formula de transcriere a operatorului lui Laplace Δ_n într-un sistem $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ de coordonate.

În particular, dacă suprafețele coordonate $\bar{x}_1 = c_1, \ldots, \bar{x}_n = c_n$ sînt ortogonale două cîte două, matricea $[g_{jk}]$ va fi diagonală, deoarece funcțiile g_{jk} se obțin cu ajutorul unor produse scalare, vectorii din $\mathbb{R}^n$ care apar în aceste produse scalare fiind normalele la suprafețele coordonate; așadar, scriind $g_{jk} = h_j^2\delta_{jk}$, deoarece

$$g_{jj} = \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_j}\right)^2,$$

avem $g_{jj} > 0$, funcțiile $h_1, h_2, \ldots, h_n$ se numesc *coeficienții Lamé* ai transformării (3.13′). Vom avea

$$g = h_1^2 h_2^2 \ldots h_n^2, \quad g^{jj} = \frac{1}{h_j^2}$$

iar din (3.15) se deduce egalitatea

$$\Delta_n u = \frac{1}{h_1 \ldots h_n}\left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1}\left(\frac{h_2 \ldots h_n}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_1}\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n}\left(\frac{h_1 \ldots h_{n-1}}{h_n}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}_n}\right)\right] \qquad (3.15')$$

care constituie evident o formă mult mai simplă decît cazul general dar care este frecvent utilizată în practică.

Exemple. 11. *Coordonatele cilindrice* în $\mathbb{R}^3$:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,\ r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty;$$

deoarece $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$, acest sistem este triplu ortogonal ($g_{jk} = 0$ pentru $j \neq k$) iar coeficienții Lamé vor fi

$$h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = 1.$$

Din (3.15′) se deduce

$$\Delta_3 u(r, \varphi, z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

În particular, dacă u nu depinde de z, se obține expresia laplacianului în *coordonate polare în plan*: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$,

$$\Delta_2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

12. *Sistemul de coordonate sferic* din $\mathbb{R}^3$:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,\ r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi;$$

deoarece

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2,$$

sistemul sferic este triplu ortogonal iar

$$h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = r\sin\theta$$

și, prin urmare, din (3.15) se deduce

$$\Delta_3 u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

13. *Sistemul de coordonate eliptice* din $\mathbb{R}^3$:

$$x = \cos\beta\,\mathrm{ch}\,h,\ y = \sin\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha,\ z = z,\ \alpha \geqslant 0,\ 0 \leqslant \beta < 2\pi$$

(suprafețele coordonate $z = c_1$, $\alpha = c_2$, $\beta = c_3$ sînt respectiv plane, cilindri eliptici, cilindri hiperbolici); se deduce

$$ds^2 = (\mathrm{ch}^2\alpha - \cos^2\beta)(d\alpha^2 + d\beta^2) + dz^2,$$

adică $h_1 = h_2 = \sqrt{\text{ch}^2\alpha - \cos^2\beta}$, $h_3 = 1$ iar

$$\Delta_3 u(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{\text{ch}^2\alpha - \cos^2\beta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

14. *Coordonate parabolice* în $\mathbb{R}^2$:

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv, \quad -\infty < u < \infty, \quad 0 < v < \infty$$

(curbele coordonate $u = c_1$, $v = c_2$ sînt familii de parabole ortogonale); aici

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (u^2 + v^2)(du^2 + dv^2)$$

și deci

$$\Delta_2 U(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right).$$

15. *Coordonatele bipolare* în $\mathbb{R}^2$:

$$x = \text{Re}\,\text{ch}\,\frac{\alpha + i\beta}{2}, \quad y = \text{Im}\,\text{ch}\,\frac{\alpha + i\beta}{2}, \quad -\infty < \alpha < \infty, \ 0 \leqslant \beta < 2\pi.$$

($\beta = c_1$ sînt cercuri care trec prin $x = \pm c_1$ iar $\alpha = c_2$ reprezintă cercuri ortogonale primei familii); deoarece

$$ds^2 = \frac{1}{(\text{ch}\,\alpha + \cos\beta)^2}(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

avem

$$\Delta_2 u = (\text{ch}\,\alpha + \cos\beta)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right).$$

16. *Coordonate elipsoidale degenerate* în $\mathbb{R}^3$:

$$x = \text{sh}\,\alpha\sin\beta\cos\varphi, \quad y = \text{sh}\,\alpha\sin\beta\sin\varphi, \quad z = \text{ch}\,\alpha\cos\beta,$$

$$\alpha \geqslant 0, \quad 0 < \beta < \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

[suprafețele coordonate sint elipsoizi de rotație turtiți pentru $\alpha = c_1$, cu focarele în punctele $(0, 0, c)$, $(0, 0, -c)$, hiperboloizi cu două pînze, de rotație, dacă $\beta = c_2$ și plane care trec prin axa z dacă $\varphi = c_3$]. Deoarece

$$ds^2 = (\text{sh}^2\alpha + \sin^2\beta)(d\alpha^2 + d\beta^2) + \text{sh}^2\alpha\sin^2\beta\, d\varphi^2,$$

se deduce

$$\Delta_3 u(\alpha, \beta, \varphi) = \frac{1}{\text{sh}^2\alpha + \sin^2\beta}\left[\frac{1}{\text{sh}\,\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\text{sh}\,\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \left(\frac{1}{\text{sh}^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

17. *Coordonatele paraboloidale* în $\mathbb{R}^3$:

$$x = \alpha\beta\cos\varphi, \quad y = \alpha\beta\sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2), \quad \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

(suprafețe coordonate sint familii ortogonale de paraboloizi de rotație dacă $\alpha = c_1$, $\beta = c_2$ și plane pentru $\varphi = c_3$). Avem

$$ds^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(d\alpha^2 + d\beta^2) + \alpha^2\beta^2 d\varphi^2$$

și deci

$$\Delta_3 u(\alpha, \beta, \varphi) = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

18. *Coordonate toroidale* în $\mathbb{R}^3$:

$$x = \frac{\text{sh}\,\alpha\cos\varphi}{\text{ch}\,\alpha - \cos\beta}, \quad y = \frac{\text{sh}\,\alpha\sin\varphi}{\text{ch}\,\alpha - \cos\beta}, \quad z = \frac{\sin\beta}{\text{ch}\,\alpha - \cos\beta}, \quad \alpha \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \beta, \ \varphi < 2\pi$$

[suprafețele coordonate sint torurile

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - \text{cth}\,\alpha)^2 + z^2 = \frac{1}{\text{sh}^2\alpha}$$

dacă $\alpha = c_1$, sferele

$$(z - \text{cth}\,\beta)^2 + x^2 + y^2 = \frac{1}{\sin^2\beta}$$

dacă $\beta = c_2$ și plane pentru $\varphi = c_3$]. Cum

$$ds^2 = \frac{1}{(\text{ch}\,\alpha - \cos\beta)^2}(d\alpha^2 + d\beta^2 + \text{sh}^2\alpha\, d\varphi^2),$$

rezultă

$$\Delta_3 u(\alpha, \beta, \varphi) = \frac{(\text{ch}\,\alpha - \cos\beta)^2}{\text{sh}\,\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\text{sh}\,\alpha}{\text{ch}\,\alpha - \cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\text{sh}\,\alpha}{\text{ch}\,\alpha - \cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\text{sh}\,\alpha}\cdot\frac{1}{\text{ch}\,\alpha - \cos\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

3.4.5. Sisteme Euler-Ostrogradski

Uneori este posibil să apară funcționalele de forma

$$I[\mathbf{u}] = \int_{D_n} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \nabla\mathbf{u})\, d\mathbf{x} \tag{3.1'}$$

în care $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$, $\nabla\mathbf{u} = (\nabla u_1, \ldots, \nabla u_m]$, ceea ce înseamnă că $L : D_n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}$, deci L este o funcție de $n + m + nm$ variabile reale cu valori reale dată, de o clasă convenabilă (de exemplu $L \in C^2$).

Evident, și în acest caz se poate formula o problemă de extrem pentru funcționala (3.1'): *trebuie găsite funcțiile* $(u_1, \ldots, u_m)$ *care zează o valoare extremă (minimă sau maximă) pentru interealigrala* (3.1') *funcțiile* $(u_1, \ldots, u_m)$ *parcurgînd o anumită mulțime de elemente denumită mulțime admisibilă.*

Această problemă de extrem se rezolvă imediat, reducîndu-o la cazul $m = 1$ care a fost tratat anterior (vezi 3.4.1); pentru aceasta, se observă că dacă $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_m)$, atunci funcția

$$g(t) = I[\mathbf{u} + t\mathbf{h}]$$

va admite un extrem (relativ) pentru $t = 0$ pentru orice $\mathbf{h}$ (evident trebuie să avem $\mathbf{u} + t\mathbf{h}$ element din mulțimea admisibilă considerată). Or, alegînd $\mathbf{h}$ succesiv de forma $(h_1, 0, \ldots, 0)$, $(0, h_2, 0, \ldots, 0)$, ..., $(0, \ldots, 0, h_m)$ în ipotezele din 3.4.1, rezultă că funcțiile $u_1, \ldots, u_m$ trebuie să satisfacă sistemul de ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{kj}}\right) - \frac{\partial L}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad u_{kj} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \tag{3.16}$$

pe care îl vom denumi *sistem Euler-Ostrogradski*, pentru a realiza eventual un extrem pentru funcționala (3.1').

Deoarece nu orice soluție a sistemului (3.16) realizează o valoare extremă pentru funcționala (3.1'), se numesc *extremele* ale acestei funcționale soluțiile $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ ale acestui sistem.

De exemplu, extremalele funcționalei

$$I\,[u, v] = \iint_{D_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

nu pot realiza o valoare extremă pentru I, deoarece integrandul este astfel încît I poate să ia valori oricît de mari sau oricît de mici. Aceste extremale vor fi soluții ale sistemului

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

și se verifică imediat că soluțiile corespunzătoare vor fi

$$u(x, y) = f_1(x - y) + f_2(x + y), \quad v(x, y) = g_1(x - y) + g_2(x + y)$$

cu f_1, f_2, g_1, g_2 funcții oarecare de clasă C^2 iar un calcul simplu arată că

$$I[u, v] = 4\iint_{D_2} [f_1'(x - y)\, f_2'(x + y) - g_1'(x - y)\, g_2'(x + y)]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,;$$

deoarece funcțiile f_1, f_2, g_1, g_2 sînt la alegerea noastră, este evident că I nu poate avea valori extreme.

În alte situații însă se pot face ipoteze asupra naturii extremului; astfel, în cazul funcționalei

$$I[u, v] = \iint_{D_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

deoarece integrandul este o sumă de pătrate, vom avea $I[u, v] \geq 0$ și valoarea extremă va fi un minim.

3.4.6. Condiția necesară Legendre de extrem

În 3.4.1 s-a arătat că dacă $u \in A$ verifică ecuația Euler-Ostrogradski corespunzătoare funcționalei (3.1), atunci este posibil ca pentru această funcție, în domeniul G_n, $I[u]$ să admită o valoare extremă; pentru precizare, se poate presupune că este cazul unei valori minime pentru (3.1) [în caz contrar, scriind $-L$ în loc de L, valoarea maximă pentru funcționala (3.1) se transformă într-o valoare minimă pentru funcționala (3.1) scrisă cu $-L$]. Condiția Legendre afirmă că dacă extremala u realizează un minim pentru funcționala (3.1), atunci forma pătratică

$$l(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial u_j\, \partial u_k}\, \xi_j \xi_k \tag{3.17}$$

(unde derivatele parțiale $\dfrac{\partial^2 L}{\partial u_j\, \partial u_k}$ sînt calculate într-un punct $\mathbf{x}^0$ oarecare din D_n iar u și u_j se înlocuiesc prin valorile extremalei și a derivatelor sale în $\mathbf{x}^0$) este nenegativ definită, adică

$$l(\boldsymbol{\xi}) \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.17'}$$

În general, condiția Legendre (3.17') nu este o condiție suficientă de minim; deci putem spune doar că dacă $l(\boldsymbol{\xi})$ își modifică semnul, funcționala nu are un optim.

Demonstrația se bazează pe faptul că dacă funcția reală $g(t)$ definită prin (3.9), $g(t) = I[u + th]$ admite un minim relativ pentru $t = 0$, atunci avem $g''(0) \geqslant 0$; or, calculînd $g''(0)$ pentru o soluție u a ecuației Euler-Ostrogradski (3.11), se obține

$$g''(0) = \int_{D_n}\left(\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial u_j \partial u_k} h_j h_k + 2\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial u\, \partial u_j} h h_j + \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} h^2\right)\mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$h_j = \frac{\partial h}{\partial x_j} \tag{3.17''}$$

și este suficient să se aleagă h convenabil astfel încît din $g''(0) \geqslant 0$ să rezulte (3.17') (reamintim că h este arbitrar, de clasă C^2 în D_n, nul pentru $\mathbf{x} \in \partial D_n$).

Integrala din (3.17'') se numește *variația a doua* a funcționalei (3.1)

Fie $\mathbf{x}^0 \in D_n$ și $\boldsymbol{\alpha}$ un vector $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; să considerăm transformarea afină $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}$ definită prin

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x_k - x_k^0), \quad x_k = x_k^0 + \sum_{j=1}^{n} a^{kj} y_j,\ \alpha_1 = a_{11},\ \alpha_2 = a_{12}, \ldots, \alpha_n = a_{1n}, \tag{3.18}$$

matricea a_{jk} fiind constantă și ortogonală; în baza construcției vectorului $\boldsymbol{\alpha}$, acesta va fi versorul direcției y_1 și scriind

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u_j \partial u_k} = A_{jk}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u\, \partial u_j} = B_j(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} = C(\mathbf{x})$$

(deoarece derivatele lui L se calculează pentru extremala $u = u(\mathbf{x})$ considerată), prin utilizarea transformării (3.18) în (3.19'') găsim

$$g''(0) = \int_{G_n}\left[\sum_{j,k=1}^{n} A'_{jk}(\mathbf{y})\, h'_j h'_k + 2\sum_{j=1}^{n} B'_j(\mathbf{y}) h' h'_j + C'(\mathbf{y})\, h'^2\right]\mathrm{d}\mathbf{y}$$

dacă G_n este imaginea lui D_n iar

$$A'_{jk}(\mathbf{y}) = \sum_{j',k'=1}^{n} A_{j'k'}[\mathbf{x}(\mathbf{y})]\, a_{j'j} a_{k'k}, \quad B'_j(\mathbf{y}) = \sum_{j'=k}^{n} B_{j'}[\mathbf{x}(\mathbf{y})]\, a_{j'j},$$

$$C'(\mathbf{y}) = C[\mathbf{x}(\mathbf{y})], \quad h'(\mathbf{y}) = h[\mathbf{x}(\mathbf{y})].$$

Deoarece h' este nul pe ∂G_n, se poate presupune supp $h' \subset G_n$ și cum h' este o funcție continuă oarecare, se poate alege h' astfel încît, dacă $0 < p < q$, să avem

$$h'(y_1, \ldots, y_n) = \begin{cases} (p - |y_1|)\left(1 - \dfrac{r}{q}\right), & \text{dacă } |y_1| \leqslant p,\ 0 \leqslant r = |\,\mathbf{y}'\,| \leqslant q, \\ 0 & \text{în celelalte situații,} \end{cases}$$

cu $\mathbf{y}' = (y_2, \ldots, y_n)$, $|\mathbf{y}'|^2 = r^2 = y_2^2 + \ldots + y_n^2$. Introducînd acest h' în ultima expresie pentru $g''(0)$, dacă se împarte $g''(0)$ prin măsura suportului lui h' și făcînd $p \to 0$, $q \to 0$, unde p și q sînt astfel încît și $\dfrac{p}{q} \to 0$, se obține inegalitatea (3.17'), deoarece

$$A'_{11}(0) = \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}(\mathbf{x}_0)\, a_{j1} a_{k1} = \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk}(\mathbf{x}_0)\, \alpha_j \alpha_k \geqslant 0$$

(pentru orice $\mathbf{x}_0 \in D_n$).

Exemplul 19. Dacă se consideră integrala

$$I[u] = \int_{D_{n+1}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t,$$

rezultă

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u_t^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u_j^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u_j \partial u_k} = 0, \text{ dacă } j \neq k, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u_t\, \partial u_j} = 0,$$

și utilizînd (3.17), se obține forma pătratică

$$l(\xi) = 2\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 - 2\xi_{n+1}^2;$$

așadar, pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $l(\xi)$ își schimbă semnul. Prin urmare, extremalele funcționalei date, adică soluțiile ecuației cu derivate parțiale

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta_n u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{3.19}$$

nu vor realiza un minim sau un maxim pentru integrala considerată; ecuația (3.19) se numește *ecuația undelor* în $\mathbb{R}^n$.

Condiția necesară de minim (3.17′) se poate extinde și la funcționalele de forma (3.1′), cînd are forma

$$\sum_{j,k,\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 L\,[\mathbf{x}^0, u(\mathbf{x}^0), \nabla_u(\mathbf{x}^0)]}{\partial u_{j\alpha}\,\partial u_{k\beta}} \lambda_\alpha \lambda_\beta \xi_j \xi_k \geqslant 0, \tag{3.20}$$

unde λ, $\xi \in \mathbb{R}^n$ sînt arbitrari, $\mathbf{x}^0 \in D_n$, și poartă numele de *condiția de minim Legendre-Hadamard*; demonstrația inegalității (3.20) este identică cu demonstrația condiției Legendre (3.17′), ținînd seama că extremalele verifică acum nu o ecuație cu derivate parțiale ci un sistem de ecuații cu derivate parțiale.

3.5. Ecuația lui Euler

3.5.1. Deducerea ecuației lui Euler

Dacă în funcționala (3.1) $n = 1$, adică dacă se consideră integrale de forma

$$I[y] = \int_{t_0}^{t_1} L[t,\ y(t), y'(t)]\,\mathrm{d}t, \tag{3.21}$$

în care $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ este un interval dat iar $L \in C^2$ în argumentele sale (ca și mai înainte, L este o funcție cu valori reale, dată), atunci, toate considerațiile din 3.4 rămîn valabile; așadar, dacă $y \in C^2([t_0, t_1])$, $y(t_0) = a$, $y(t_1) = b$, atunci funcțiile care vor realiza un extrem pentru (3.21) vor verifica în mod obligatoriu ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{3.22}$$

care se deduce din ecuația Euler-Ostrogradski (3.11), pentru $n = 1$ și punînd y în loc de u. Ecuația (3.22) se numește *ecuația lui Euler* atașată funcționalei (3.21) și este o ecuație diferențială (în general neliniară) de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 L}{\partial y'\,\partial t} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{3.22′}$$

$\left(\text{evident, în ipoteza } \dfrac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \neq 0\right)$; soluțiile acestei ecuații vor trebui să verifice și condițiile la capete impuse

$$y(t_0) = a, \qquad y(t_1) = b. \tag{3.22″}$$

Dacă se cunoaște soluția generală a ecuației lui Euler (3.22) este posibil ca cele două constante de integrare să fie unic determinate prin problema bilocală (3.22″), dar aceasta nu implică rezolvarea problemei de optim impusă funcționalei (3.21). Condiția lui Legendre (3.17′), în cazul de față se scrie

$$\frac{\partial^2 L(t,\ y(t), y'(t))}{\partial y'^2} \geqslant 0, \qquad t \in [t_0,\ t_1],$$

în cazul în care extremala y realizează un minim (în cazul unui maxim, inegalitatea se inversează) și se observă că această condiție este strîns legată de condiția ca ecuația lui Euler (3.22′) să fie efectiv o ecuație diferențială de ordinul al doilea.

Exemplul 20. Să determinăm optimul integralei

$$I[y] = \int_1^2 (t^2 y'^2 + y^2)\mathrm{d}t$$

în mulțimea funcțiilor de clasă $C^2([1, 2])$ care verifică la capete condițiile $y(1) = 5$, $y(2) = 3$. Ecuația lui Euler va fi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\,t^2 y') - 2y = 0,$$

adică $t^2 y'' + 2ty' - y = 0$ și este o ecuație diferențială de tip Euler, a cărei soluție generală este $y(t) = c_1 t + c_2 t^{-2}$; condițiile la capete se verifică pentru $c_1 = 1$, $c_2 = 4$ și, prin urmare, singura funcție care poate realiza acest optim va fi $y(t) = t + 4t^{-2}$ iar deoarece $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y'^2} = 2t^2 > 0$, $t \in [1, 2]$, optimul poate fi un minim.

În general, este dificilă determinarea soluției generale a ecuației lui Euler (3.22); există însă uneori posibilitatea fie a integrării acestei ecuații, fie a determinării unor integrale prime. Astfel, dacă

$$L = L(y'), \quad \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \neq 0\right),$$

din (3.22′) se deduce ecuația $y'' = 0$. Extremalele vor fi segmente de drepte iar pentru orice condiții bilocale a și b se va determina o singură extremală care verifică datele problemei ; se poate preciza, în baza condiției lui Legendre, natura optimului.

Exemplul 21 (*problema geodezicelor din* $\mathbb{R}^2$). Dacă în plan se dau două puncte $A_0(t_0, a)$, $A_2(t_1, b)$, geodezica din $\mathbb{R}^2$ care trece prin aceste puncte va fi curba pe care se va realiza minimul distanței dintre aceste puncte ; dacă o curbă oarecare cu capetele în A_0 și A_1 are ecuația $y=y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, distanța dintre A_0 și A_1 calculată pe această curbă (evident, presupusă rectificabilă) va fi

$$I[y] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + y'^2(t)}\, \mathrm{d}t.$$

Aici $L = \sqrt{1+y'^2} = L(y')$ și deci extremalele sint segmente de dreaptă $y = c_1 t + c_2$, iar deoarece $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y'^2} = (1+y'^2)^{-3/2} > 0$, optimul va putea fi un minim.

Dacă $L = L(t, y')$, deci L nu depinde explicit de y, ecuația Euler (3.22) va admite integrala primă $\dfrac{\partial L}{\partial y'}$, deoarece ecuația (3.22) se scrie

$$\frac{\partial L(t, y')}{\partial y'} = c\,;$$

aducînd această ecuația la forma normală, $y' = g(t, c)$, se găsește soluția generală

$$y = \int g(t, c)\, \mathrm{d}t + c'.$$

Exemplul 22. Dacă se consideră funcționala

$$I\,[y] = \int_{t_0}^{t} \sqrt{t^2 + y'^2}\, \mathrm{d}t,$$

avem $L = L(t, y') = \sqrt{t^2 + y'^2}$; ecuația Euler se va scrie

$$\frac{y'}{\sqrt{t^2 + y'^2}} = c_1,$$

adică $y' = \dfrac{c}{\sqrt{1-c^2}}\, t$ și $y = \dfrac{c}{2\sqrt{1-c^2}}\, t^2 + c'$. Extremalele sint deci arce de parabolă iar pentru orice două puncte din $\mathbb{R}^2$ se poate determina o parabolă din familia dată care trece prin acele puncte și din condiția lui Legendre se deduce că optimul realizat de această extremală poate fi un minim.

Dacă $L = L(y, y')$ (deci dacă variabila independentă nu apare explicit în L), atunci ecuația lui Euler (3.22) va admite integrala primă

$$L_* = L - y' \frac{\partial L}{\partial y'},$$

deoarece

$$\frac{\mathrm{d}L_*}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial y} y' + \frac{\partial L}{\partial y'} y'' - y'' \frac{\partial L}{\partial y'} - y' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) =$$

$$= -\, y' \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} \right],$$

deci pe extemale L_* este constant.

Exemplul 23 (*problema suprafeței de rotație minime*). Se dau două puncte $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$ din $\mathbb{R}^2$ cu $x_0 < x_1$, $y_0 \geqslant 0$, $y_1 \geqslant 0$, care trebuie unite printr-o curbă $y = y(x) \geqslant 0$, $x \in [x_0, x_1]$, astfel incit suprafața obținută prin rotația curbei în jurul axei Ox să aibă aria minimă ; deoarece aria în cauză este egală cu $2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x$, se obține problema variațională

$$I[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_0} y\sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x \to \inf$$

în care $L = 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}$. Este ușor de văzut că ecuația lui Euler este mai dificil de integrat, pe cînd ecuația echivalentă $L_* = 2\pi h$ are forma simplă

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = h$$

cu forma normală

$$y' = \frac{1}{h}\sqrt{y^2 - h^2} \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - h^2}} = \frac{1}{h}\, \mathrm{d}t$$

care se integrează ușor ; se obține, cu substituția $y = h \operatorname{ch} t$,

$$y(x) = h \operatorname{ch}\left(\frac{x - h_0}{h}\right)$$

iar extremalele sint o familie de lănțișoare. Constantele de integrare h și h_0 se determină din condițiile $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$; este posibil însă aici ca $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y'^2}$ să-și schimbe semnul, deoarece

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} = \frac{2\pi y}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

3.5.2. Ecuația Euler și lema lui P. Du Bois Raymond

Reluînd modul de obținere al ecuației (3.22), prin utilizarea teoremei 3.4 se pot obține unele informații suplimentare asupra mulțimii de funcții admisibile în care se realizează optimul funcționalei (3.21); în 3.5.2 mulțimea admisibilă este formată din funcții de clasă $C^2([t_0, t_1])$ care verifică $y(t_0) = a$, $y(t_1) = b$, a și b fiind numere reale date. Vom arăta că ipoteza $y \in C^2$ poate fi înlocuită cu ipoteza mai puțin restrictivă $y \in C^1([t_0, t_1])$ dar adăugîndu-i condiția de regularitate

$$\frac{\partial^2 L\,[t, y(t), y'(t)]}{\partial y'^2} \neq 0. \tag{3.23}$$

Utilizînd definiția diferențialei slabe, în cazul funcționalei (3.21), găsim

$$(\mathrm{D}I)(y, h) = \frac{\partial}{\partial t} I[x + th]\Big|_{t=0} = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\, h + \frac{\partial L}{\partial y'}\, h'\right)\mathrm{d}t,$$

dacă $L \in C^1$ iar $y \in C^1([t_0, t_1])$, h fiind o funcție de clasă $C^1([t_0, t_1])$, nulă pentru $t = t_0$ și $t = t_1$. Integrînd prin părți, se poate scrie

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial y}\, h\, \mathrm{d}t = g(t)\, h(t)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} g(t)\, h'(t)\, \mathrm{d}t = -\int_{t_0}^{t_1} g(t)\, h'(t)\, \mathrm{d}t,$$

unde g este o primitivă oarecare a funcției continue $\dfrac{\partial L(t, y(t), y'(t))}{\partial y}$, ca de obicei, y este funcția (din clasa admisibilă de funcții) care realizează optimul funcționalei (3.21). Revenind la diferențiala slabă, se obține

$$(\mathrm{D}I)(y, h) = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial y'} - g\right) h'\, \mathrm{d}t$$

și utilizînd condiția necesară de extrem, pentru orice h care verifică ipotezele amintite, va trebui să avem

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L\,[t, y(t), y'(t)]}{\partial y'} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial L\,[s, y(s), y'(s)]}{\partial y}\, \mathrm{d}s\right) h'(t)\, \mathrm{d}t = 0,$$

ceea ce, potrivit teoremei 3.4 (pentru $m = 1$), înseamnă

$$\frac{\partial L[t, y(t), y'(t)]}{\partial y'} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial L\,[s, y(s), y'(s)]}{\partial y}\, \mathrm{d}s = c, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3.23'}$$

Prin urmare, funcțiile y care realizează optimul funcționalei (3.21), în ipoteza că sînt de clasă C^1 (ca și L), vor verifica pentru orice t din intervalul $[t_0, t_1]$ ecuația (3.23'); dacă L este de clasă C^2 și se verifică și condiția (3.23'), atunci din (3.23') se poate deduce existența derivatei $y''(t)$, $t \in\,]t_0, t_1[$ [în orice punct t în care (3.23') este verificat].

Din (3.23') se deduce derivabilitatea funcției $\dfrac{\partial L}{\partial y'}$ pentru funcțiile $y = y(t)$ care realizează optimul funcționalei (3.21), deoarece atît constanta c cît și integrala nedefinită sînt derivabile, dar pentru a putea scrie egalitatea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial y'\, \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y}\, y' + \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}\, y'', \qquad t \in\,]t_0, t_1[,$$

este necesară existența derivatei y''; or notînd $\dfrac{\partial L}{\partial y'} = L_{y'}$, cum

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{L_{y'}[t + \varepsilon, y(t + \varepsilon), y'(t + \varepsilon)] - L_{y'}[t, y(t), y'(t)]}{\varepsilon},$$

prin aplicarea teoremei creșterilor finite, avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\frac{\partial \bar{L}_{y'}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{L}_{y'}}{\partial y} \cdot \frac{y(t + \varepsilon) - y(t)}{\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \bar{L}_{y'}}{\partial y'}\, \frac{y'(t + \varepsilon) - y'(t)}{\varepsilon}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 L}{\partial y'\, \partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial y'\, \partial y}\, y'(t) + \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}\, y''(t),$$

de unde se poate exprima $y''(t)$, $t \in\,]t_0, t_1[$, ținînd seama că există

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right), \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial t}, \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y}\, y' \text{ iar } \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \neq 0.$$

Dacă se admite și ipoteza $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} = 0$ în anumite puncte din $]t_0, t_1[$, atunci din considerațiile anterioare se deduce existența derivatei secunde peste tot în $]t_0, t_1[$ exceptînd însă aceste puncte; dacă ar fi $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} = 0$ pentru orice $t \in [t_0, t_1]$, aceasta înseamnă

$$L[t, y(t), y'(t)] = L_1[t, y(t)]\, y' + L_2[t, y(t)]$$

iar ecuația lui Euler (3.22) va fi verificată numai dacă

$$\frac{\partial L_1(t, y)}{\partial t} = \frac{\partial L_2(t, y)}{\partial y},$$

ceea ce este echivalent cu faptul că $L = L_1 y' + L_2$ este derivata în raport cu t a unei funcții de două variabile: $L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_3(t, y)$. Or în acest caz funcționala (3.21) se scrie

$$I[y] = \int_{t_0}^{t_1} L[t, y(t), y'(t)]\, \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_3[t, y(t)]\, \mathrm{d}t = L_3[t, y(t)] \Big|_{t=t_0}^{t=t_1},$$

deci I are aceeași valoare pentru orice funcție admisibilă (în L_3 apar valorile lui y la capetele intervalului $[t_0, t_1]$) și, prin urmare, este cazul unei funcționale constante, pentru care nu este posibil să se rezolve o probemă de optim.

3.5.3. Condiții la limită naturale

Dacă mulțimea admisibilă de funcții este formată din funcții de clasă $C^2([t_0, t_1])$, dar nu se mai impun condițiile bilocale (3.22''), atunci în locul acestora apar alte condiții care se deduc direct din condiția necesară de extrem; raționamentul din 3.4.2, aplicat funcționalei (3.21), conduce la concluzia că pentru $t = t_0$ și $t = t_1$ trebuie verificată condiția

$$\frac{\partial L[t, y(t), y'(t)]}{\partial y'} h(t) \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} = 0,$$

de unde, deoarece h este arbitrar [deci și numerele reale $h(t_0)$ și $h(t_1)$ sînt oarecare], se obțin condițiile la limită naturale pentru funcționala (3.21)

$$\frac{\partial L[t_0, y(t_0), y'(t_0)]}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial L[t_1, y(t_1), y'(t_1)]}{\partial y'} = 0. \quad (3.24)$$

Aceste condiții vor înlocui condițiile bilocale (3.22''); astfel în cazul suprafeței de rotație minimă (exemplul 23), deoarece $\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{2\pi y y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$, condițiile la limită naturale vor fi $y(t_0) y'(t_0) = 0$ și $y(t_1)\, y'(t_1) = 0$. Dacă presupunem $y(t_0) = 0$, pentru $t = t_1$ se poate presupune $y'(t_1) = 0$, deci tangenta la curba extremală $y = y(x)$ în $t = t_1$ va fi orizontală.

Evident, se pot face și combinații între condițiile bilocale (3.22'') și condițiile la limită naturale (3.24), în sensul că pentru $t = t_0$ se poate impune un tip de condiție, iar pentru $t = t_1$ celălalt tip; din punct de vedere geometric, dacă în cazul condițiilor la limită (3.22'') mulțimea admisibilă este formată din curbe de clasă C^2 cu extremitățile în punctele $A_0(t_0, a)$ și $A_1(t_1, b)$, în cazul condițiilor la limită naturale (3.24), mulțimea admisibilă este formată din curbe de clasă C^2 care au extremitățile pe dreptele paralele $t = t_0$ și $t = t_1$ din planul tOy.

3.5.4. Condiții suficiente de existență a extremalelor

În cazul ecuațiilor lui Euler

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial t} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

soluțiile acesteia se vor numi extremale ale funcționalei (3.21), numai dacă se verifică și condițiile bilocale $y(t_0) = a$, $y(t_1) = b$; dar nu orice ecuație diferențială de ordinul al doilea posedă soluții care să treacă prin două puncte date din $\mathbb{R}^2$. Scriind ecuația lui Euler sub forma normală

$$y'' = f(t, y, y'), \quad (3.25)$$

se pot obține condiții suficiente pentru existența extemalelor; astfel dacă $f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ sînt continue pentru orice $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ și pentru orice $y' \in \mathbb{R}$ iar dacă există $k > 0$ și funcțiile

$$\alpha = \alpha(t, y) \geqslant 0, \ \beta = \beta(t, y) \geqslant 0$$

mărginite în orice domeniu din $\mathbb{R}^2$, astfel încît

$$\frac{\partial f(t, y, y')}{\partial y} > k, \quad |f(t, y, y')| \leqslant \alpha y'^2 + \beta,$$

atunci va exista o singură soluție a ecuației diferențiale (3.25) care trece prin punctele (t_0, a) și (t_1, b) dacă $t_0 < t_1$. Nu vom face demonstrația acestui rezultat, cunoscut sub numele de *teorema lui Bernstein*, dar vom considera cîteva cazuri particulare.

Exemple. 24. Pentru funcționala

$$I[y] = \int_{t_0}^{t_1} e^{-y^2} (1 - y'^2)\, dt$$

ecuația lui Euler se scrie $y'' = y(y'^2 + 1)$ și deci

$$f(t, y, y') = y(y'^2 + 1), \ \frac{\partial f}{\partial y} = y'^2 + 1;$$

rezultă

$$|f(t, y, y')| \leqslant |y|\, y'^2 + |y|, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \geqslant 1,$$

adică $\alpha = \beta = |y| \geqslant 0$ și $k = 1$ iar rezultatul anterior este aplicabil; prin orice două puncte din plan avînd abscise diferite trece o extremală a funcționalei în cauză.

25. În cazul funcționalei

$$I[y] = \int_{t_0}^{t_1} (1 - \ln y'^2) y'^2\, dt, \qquad y' = \frac{dy}{dt}$$

ecuația lui Euler este $y'' = y'^4$, deci

$$f(t, y, y') = y'^4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

și condițiile anterioare nu sînt verificate; integrînd ecuația lui Euler, se obține

$$y = -\frac{1}{3}(c_1 - 4x)^{3/4} + c_2$$

și este vizibil că deoarece funcția $c_1 - 4x$ poate să fie negativă (deci y nu va avea valori reale pentru orice c_1), nu vor exista extremale ale funcționalei considerate care să treacă prin orice două puncte din plan.

3.6. Sistemul Euler-Lagrange

Dacă $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, deoarece $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$, $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, funcționalele

$$I[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]\, dt \tag{3.26}$$

vor depinde de n funcții necunoscute; deoarece aceste funcționale pot fi considerate un caz particular al funcționalelor (3.1') (cu $n = 1$ și $m = n$), extremalele ei se obțin din (3.16) și vor fi soluțiile sistemului diferențial

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.27}$$

care nu este altceva decît *sistemul Euler-Lagrange* dedus în cap. 2 cu ajutorul principiului de maxim al lui Pontreaghin.

Dacă mulțimea admisibilă de funcții verifică la capete condițiile

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1 \tag{3.27'}$$

cu $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$, atunci extremalele vor exista numai dacă sistemul Euler-Lagrange (3.27) admite soluții care satisfac (3.27'); dacă nu apar condiții de forma (3.27'), atunci funcționala (3.26) va avea o valoare staționară dacă la capete se verifică datele la limită naturale (în ipoteza t_0 și t_1 fixați)

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right|_{t=t_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right|_{t=t_1} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.27''}$$

[în funcțiile $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}$, $\mathbf{x}$ se înlocuiește prin $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, soluție a sistemului (3.27).]

Exemplul 26. Să considerăm funcționala

$$I[\mathbf{x}] = \int_0^{\pi} (\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 + \sin t)\mathrm{d}t$$

pentru care sistemul Euler-Lagrange va fi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\dot{x}_1) - (-4x_1 + 2x_2) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-2\dot{x}_2) - (2x_1) = 0,$$

adică

$$\ddot{x}_1 + 2x_1 - x_2 = 0, \ \ddot{x}_2 + x_1 = 0;$$

eliminînd între aceste două ecuații pe x_2 (prin derivări), se obține ecuația

$$x_1^{IV} + 2x_1'' + x_1 = 0$$

verificată de x_1, deci

$$x_1(t) = (c_1 + tc_3)\cos t + (c_2 + x c_4)\sin t,$$

fiindcă ecuația caracteristică atașată va fi $(r^2 + 1)^2 = 0$. Deoarece $x_2 = \ddot{x}_1 + 2x_1$, se găsește

$$x_2(t) = (c_1 + 2c_4 + tc_3)\cos t + (c_2 - 2c_3 + tc_4)\sin t;$$

impunînd condițiile la limită bilocale

$$x_1(0) = 0, \ x_1(\pi) = 1, \ x_2(0) = 0, \ x_2(\pi) = -1,$$

se găsesc extremalele

$$x_1(t) = a \sin t - \frac{1}{\pi} t \cos t,$$

$$x_2(t) = a \sin t - \frac{1}{\pi} t \cos t + \frac{2}{\pi} \sin t,$$

care depind de un parametru $a \in \mathbb{R}$.

În situația în care nu se cunosc condițiile la capete, se impun condițiile la limită naturale (3.27″), care, deoarece $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 2\dot{x}_1$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = -2\dot{x}_2$, se vor transcrie în acest caz

$$\dot{x}_1(0) = 0, \ \dot{x}_1(\pi) = 0, \ \dot{x}_2(0) = 0, \ \dot{x}_2(\pi) = 0$$

și se găsesc extremalele

$$x_1(t) = b \cos t, \ x_2(t) = b \cos t$$

care de asemenea depind de un parametru real.

3.7. Variația sincronă și variația asincronă

3.7.1. Notația variațională

Vom lua în considerație funcționala $I : M \to \mathbb{R}$, în care M este o mulțime de funcții $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in C^2([t_0, t_1])$ iar

$$I[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]\,\mathrm{d}t \tag{3.26}$$

și, ca de obicei, ne interesează funcțiile $\mathbf{x}^* \in M$ cu proprietatea

$$I[\mathbf{x}^*] \leqslant I[\mathbf{x}] \quad (I[\mathbf{x}^*] \geqslant I[\mathbf{x}]), \ \ \mathbf{x} \in M.$$

Vom conveni să notăm prin $(\delta\mathbf{x})(t) = \delta\mathbf{x}(t)$ diferența a două elemente arbitrare din M, deci

$$(\delta\mathbf{x})(t) = \mathbf{x}^{(1)}(t) - \mathbf{x}^{(2)}(t) = (x_1^1(t) - x_1^2(t), \ldots, x_n^1(t) - x_n^2(t))$$

și vom numi această funcție vector *variația funcției vector* $\mathbf{x}$; variația $\delta\mathbf{x}$ va juca în viitor același rol pe care l-a jucat elementul h din 3.2. Evident, $\delta\mathbf{x} \in C^2([t_0, t_1])$ iar dacă elementele din M verifică pentru $t = t_0$ și $t = t_1$ condiții de forma (3.27′), atunci $(\delta\mathbf{x})(t_0) = 0$, $(\delta\mathbf{x})(t_1) = 0$; vom conveni să notăm prin $\bar{t}$ și $\overline{\mathbf{x}}$ următoarele variabile:

$$\bar{t} = t + \varepsilon\delta t, \ \ \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \varepsilon\delta\mathbf{x}, \tag{3.27}$$

în care $\delta\mathbf{x}$ $(= (\delta\mathbf{x})(t))$ are semnificația anterioară. Aici δt va fi o funcție de $t \in [t_0, t_1]$ de o clasă convenabilă iar $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}(\bar{t})$, $\bar{t} \in [\bar{t}_0, \bar{t}_1]$; în plus

$$\bar{t}_0 = t_0 + \varepsilon(\delta t)(t_0), \quad \bar{t}_1 = t_1 + \varepsilon(\delta t)(t_1) \tag{3.27′}$$

și vom nota $(\delta t)(t_0) = \delta t_0$, $(\delta t)(t_1) = \delta t_1$. Cu aceste convenții, se pot lua în considerație și funcționale (3.23) în care intervalul de integrare este variabil.

3.7.2. Variaţia întîi generală a funcţionalelor $I[\mathbf{x}]$

Vom presupune $\mathbf{x}(t) \in M$ astfel determinat, încît realizează un extrem pentru funcţionala (3.26) şi vom nota

$$I[\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}] = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} L[\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}(\bar{t}), \dot{\bar{\mathbf{x}}}(\bar{t})]\,\mathrm{d}\bar{t} \tag{3.27''}$$

cu $\bar{t}$ şi $\bar{\mathbf{x}}$ definiţi prin (3.27); din (3.27'') se deduce $I[\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}]|_{\varepsilon=0} =$ extrem şi vom nota, pentru simetrie,

$$\delta I[\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}, \delta t] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} I[\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}]\Big|_{\varepsilon=0}$$

iar în mod necesar

$$\delta I[\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}, \delta t] = 0$$

pentru orice $\delta\mathbf{x}$ şi δt. Vom conveni să spunem că $\delta I[\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}, \delta t]$ este *variaţia întîi asincronă* a funcţionalei (3.26) iar $\delta I[\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}, 0]$ va fi *variaţia întîi sincronă* a aceleiaşi funcţionale; prin *variaţia întîi generală a funcţionalei* (3.26) se va înţelege variaţia întîi asincronă a acesteia şi pentru calculul ei efectiv este suficient să se efectueze schimbarea de variabilă $\bar{t} = t + \varepsilon\delta t$ în (3.27'). Se obţine

$$I[\mathbf{x} + \varepsilon\delta\mathbf{x}, t + \varepsilon\delta t] = \int_{t_0}^{t_1} L\left[t + \varepsilon\delta t,\ \mathbf{x} + \varepsilon\delta\mathbf{x},\ \frac{\mathrm{d}(\mathbf{x} + \varepsilon\delta\mathbf{x})}{\mathrm{d}(t + \varepsilon\delta t)}\right]\mathrm{d}(t + \varepsilon\delta t)$$

dacă se ţine seama de (3.27'); cum această egalitate se scrie

$$I[\mathbf{x} + \varepsilon\delta\mathbf{x}, t + \varepsilon\delta t] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t + \varepsilon\delta t, \mathbf{x} + \varepsilon\delta\mathbf{x}, \frac{\dot{\mathbf{x}} + \varepsilon\delta\dot{\mathbf{x}}}{1 + \varepsilon\delta\dot{t}}\right)(1 + \varepsilon\delta\dot{t})\,\mathrm{d}t,$$

dacă L este de clasă C^1 în argumentele ei, se poate deriva în raport cu ε sub semnul integralei şi deci

$$\delta I[\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}, \delta t] =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial t}\delta t + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_j}\delta x_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}(\delta\dot{x}_j - \dot{x}_j\delta\dot{t}) + L\delta\dot{t}\right]\mathrm{d}t$$

cu notaţia uzuală $\delta\dot{x}_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x_j$, $\delta\dot{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta t$. Dacă L este de clasă C^2 în argumentele sale, deoarece

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\delta\dot{x}_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\delta x_j\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)\delta x_j,$$

$$\left(L - \sum_{j=1}^{n}\dot{x}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)\delta\dot{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(L - \sum_{j=1}^{n}\dot{x}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)\delta t\right] -$$

$$- \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L - \sum_{j=1}^{n}\dot{x}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)\right]\delta t,$$

integrînd prin părţi, se obţine expresia finală a variaţiei întîi generală pentru funcţionala (3.26)

$$\delta I[\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}, \delta t] = \left[\left(L - \sum_{j=1}^{n}\dot{x}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)\delta t + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\delta x_j\right]_{t_0}^{t_1} -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j}\right]\delta x_j + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L - \sum_{j=1}^{n}\dot{x}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial t}\delta t\right\}\mathrm{d}t. \tag{3.28}$$

Utilizînd notaţiile

$$L_* = L - \sum_{j=1}^{n}\dot{x}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}, \tag{3.28'}$$

$$L_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$L_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L - \sum_{j=1}^{n}\dot{x}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}L_*}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial t},$$

variaţia întîi generală (asincronă) a funcţionalei considerate se scrie

$$\delta I[\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}, \delta t] = \left(L_*\delta t + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\delta x_j\right)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{j=1}^{n}L_j\delta x_j + L_0\delta t\right)\mathrm{d}t \tag{3.29}$$

iar variația întîi sincronă, care se deduce din (3.29) pentru $\delta t = 0$, va avea forma

$$\delta I[\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}, 0] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\,\delta x_j\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{j=1}^{n} L_j\,\delta x_j\right)\mathrm{d}t \qquad (3.29')$$

și deci va coincide cu diferențiala slabă a funcționalei (3.26). Din expresia lui L_0 din (3.28') se obține egalitatea

$$L_0 = -\sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j\, L_j, \qquad (3.30)$$

deoarece

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L - \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_j}\dot{x}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\ddot{x}_j -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \ddot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j}\right],$$

ceea ce face ca egalitatea (3.29) să se mai scrie și sub forma echivalentă

$$\delta I[\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}, \delta t] = \left(L_* \,\delta t + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\,\delta x_j\right)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{j=1}^{n} L_j\ \delta^* x_j\right)\mathrm{d}t$$

cu notația $\delta^* x_j = \delta x_j - \dot{x}_j \delta t$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Egalitatea (3.30) permite deducerea unei integrale prime pentru sistemul Euler-Lagrange; astfel dacă lagrangianul L nu depinde explicit de t $\left(\text{deci dacă } \frac{\partial L}{\partial t} = 0\right)$, atunci funcția L_* este constantă pe extremalele funcționalei

$$I[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L[\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]\,\mathrm{d}t,$$

deoarece din egalitatea $L_0 = -\sum_{n=1}^{n} \dot{x}_j L_j = \frac{\mathrm{d}L_*}{\mathrm{d}t}$, dacă $L_j = 0, j = 1, 2, \ldots, n$,

se deduce $\frac{\mathrm{d}L_*}{\mathrm{d}t} = 0$. Așadar, funcția

$$L_*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}$$

va fi o integrală primă a sistemului (3.27), deoarece acest sistem se poate scrie $L_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

3.7.3. Invarianța sistemului Euler-Lagrange

Extremalele funcționalei (3.26), scriindu-se sub forma

$$x_j = x(t), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

vor fi curbe în $\mathbb{R}^{n+1}$; aceste curbe au o semnificație independentă de sistemul de coordonate ales, fiind o proprietate geometrică a spațiului considerat dacă L este un invariant, adică dacă $L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \bar{L}(t, \bar{\mathbf{x}}, \dot{\bar{\mathbf{x}}})$ în ipoteza trecerii de la sistemul de coordonate $x_1, \ldots, x_n$ la sistemul $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, definit prin (3.13). Aici

$$\bar{L}(t, \bar{\mathbf{x}}, \dot{\bar{\mathbf{x}}},) = L\left[t, \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}), \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k}\dot{\bar{x}}_k\right],$$

deoarece din egalitatea $\mathrm{d}x_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k}\mathrm{d}\bar{x}_k$ se deduce

$$\dot{x}_j = \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k}\frac{\mathrm{d}\bar{x}_k}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k}\cdot \dot{\bar{x}}_k;$$

avem

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}_k}\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{x}}_k}\frac{\partial \dot{\bar{x}}_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}_k}\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_j} +$$

$$+ \sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{x}}_k}\frac{\partial^2 \bar{x}_k}{\partial x_j \partial x_l}\dot{x}_l,$$

deoarece din egalitatea $\dot{\bar{x}}_k = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_l}\dot{x}_l$ se deduce

$$\frac{\partial \dot{\bar{x}}}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \bar{x}_k}{\partial x_l\, \partial x_j}\dot{x}_l.$$

În plus, deoarece

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{x}}_k}\frac{\partial \dot{\bar{x}}_k}{\partial \dot{x}_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{x}}_k}\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_j},$$

utilizînd legătura dintre $\dot{\bar{x}}_k$ și $\dot{x}_j$, rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{x}}_k}\right)\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_j} + \sum_{l,k=1}^{n} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{x}}_k}\frac{\partial^2 \bar{x}_k}{\partial x_j\, \partial x_l}\dot{x}_l$$

și, prin urmare,

$$L_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{x}}_k}\right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}_k}\right]\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_j},$$

deci

$$L_j = \sum_{k=1}^{n} \bar{L}_k \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

notînd cu $\bar{L}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, membrul întîi al sistemului Euler-Lagrange pentru lagrangianul $\bar{L}$; așadar, dacă avem $L_j = 0$, $j = 1, \dots, n$, vom avea și $\bar{L}_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, deoarece ultima egalitate se poate scrie și sub forma

$$\bar{L}_k = \sum_{j=1}^{n} L_j \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_k}, \qquad k = 1, \dots, n,$$

prin aplicarea regulii lui Crammer.

3.7.4. Forma normală a sistemului Euler-Lagrange

Scris explicit, sistemul Euler-Lagrange va fi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j\, \partial \dot{x}_k}\ddot{x}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j\, \partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j\, \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

iar forma normală se va putea obține dacă matricea

$$\mathbf{G} = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j\, \partial \dot{x}_k}\right] = [g_{jk}]$$

este nesingulară: $g_{jk} = g_{jk}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$; dacă g^{jk} sînt elementele matricei inverse matricei $\mathbf{G}$, forma normală în cauză va fi

$$\ddot{x}_k + f_k(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0,$$

unde

$$f_k = \sum_{j=1}^{n} g^{kj}\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j\, \partial \dot{x}_l}\dot{x}_l + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j\, \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x_j}\right).$$

În particular, dacă $L = L(\dot{\mathbf{x}})$ iar $\mathbf{G}$ este nesinguară, forma normală a sistemului Euler-Lagrange va fi $\ddot{x}_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, iar extremalele vor fi drepte.

Exemple. 27. Pentru funcționala

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(1 + y'^2)(x^2 + y^2)}\,\mathrm{d}x, \quad L(x, y, y') = \sqrt{(1 + y'^2)(x^2 + y^2)},$$

ecuația lui Euler are o formă destul de complicată; utilizînd coordonatele polare $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, deoarece

$$x^2 + y^2 = r^2, \ \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{r'^2 + r^2}\,\mathrm{d}\theta, \quad r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta},$$

funcționala dată se scrie

$$I[r] = \int^{\theta_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\,\mathrm{d}\theta, \quad \bar{L}(\theta, r, r') = r\sqrt{r^2 + r'^2}$$

iar ecuația lui Euler se va scrie sub forma

$$\bar{L}_* = c_1, \qquad \bar{L}_* = \bar{L} - r'\frac{\partial \bar{L}}{\partial r'}.$$

Deci rezultă ecuația diferențială

$$r^3 = c_1\sqrt{r^2 + r'^2}$$

a cărei formă normală va fi

$$r' = \frac{r}{c}\sqrt{r^4 - c_1^2}.$$

Această ecuaţie diferenţială avînd variabilele separabile se integrează uşor :

$$\theta - \frac{1}{2}\theta_0 = c_1 \int \frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^4 - c_1^2}} = c_1 \int \frac{r^3\,\mathrm{d}r}{r^4\sqrt{r^4 - c_1^2}}$$

iar substituţia $r^4 - c_1^2 = t$ conduce la egalitatea

$$\theta - \frac{1}{2}\theta_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{r^4 - c_1^2}}{c_1},$$

adică

$$c_1^2[\operatorname{tg}^2(2\theta - \theta_0) + 1] = r^4,$$

deci

$$r^4 \cos^2(2\theta - \theta_0) = c_1^2,$$

ceea ce inseamnă

$$(x^2 + y^2)(x^2 - y^2 + 2b\,xy) = c$$

în coordonatele carteziene.

28. *Forma lui Weierstrass a ecuaţiei lui Euler.* Dacă extremalele funcţionalei

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)]\,\mathrm{d}x$$

sînt scrise parametric, adică

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

funcţiile x şi $y(t)$ fiind presupuse de clasă C^2 pe porţiuni iar $|\dot{x}(t)| + |\dot{y}(t)| > 0$, atunci notînd

$$\mathcal{F}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}\,F\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right),$$

funcţia $\mathcal{F}$ va fi pozitiv omogenă de grad unu în $\dot{x}$ şi $\dot{y}$ (vezi 2.2.4) iar identitatea lui Euler se va scrie

$$\dot{x}\mathcal{F}_{\dot{x}} + \dot{y}\mathcal{F}_{\dot{y}} = \mathcal{F}, \quad \mathcal{F}_{\dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}}, \quad \mathcal{F}_{\dot{y}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{y}};$$

vom avea deci

$$I[y] = I^*[x, y] = \int_{t_0}^{t_1} F\left[x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right]\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{F}[x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)]\,\mathrm{d}t$$

dacă $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$. Considerînd funcţionala $I^*[x, y]$, extremalele vor verifica sistemul Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_{\dot{x}} - \mathcal{F}_x = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_{\dot{y}} - \mathcal{F}_y = 0. \tag{3.30'}$$

Dar aceste două ecuaţii nu pot fi independente : acestea împreună cu identitatea lui Euler trebuie să conducă la ecuaţia lui Euler pentru funcţionala $I[y]$; această dependenţă se poate obţine în modul următor : derivînd identitatea lui Euler, se deduc identităţile

$$\mathcal{F}_x = \dot{x}\mathcal{F}_{x\dot{x}} + \dot{y}\mathcal{F}_{x\dot{y}}, \qquad \mathcal{F}_y = \dot{x}\mathcal{F}_{y\dot{x}} + \dot{y}\mathcal{F}_{y\dot{y}},$$

$$0 = \dot{x}\mathcal{F}_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y}\mathcal{F}_{\dot{x}\dot{y}}, \qquad 0 = \dot{x}\mathcal{F}_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y}\mathcal{F}_{\dot{y}\dot{y}},$$

care conduc la şirul de egalităţi

$$\frac{\mathcal{F}_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = -\frac{\mathcal{F}_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}} = \frac{\mathcal{F}_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2} = \mathcal{F}_1.$$

Apoi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_{\dot{x}} - \mathcal{F}_x = \ddot{x}\mathcal{F}_{\dot{x}\dot{x}} + \ddot{y}\mathcal{F}_{\dot{x}\dot{y}} + \dot{x}\mathcal{F}_{x\dot{x}} + \dot{y}\mathcal{F}_{y\dot{x}} - \dot{x}\mathcal{F}_{x\dot{x}} - \dot{y}\mathcal{F}_{x\dot{y}} =$$

$$= \dot{y}[(\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y})\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_{x\dot{y}} + \mathcal{F}_{\dot{x}y} + \mathcal{F}_{\dot{x}y}],$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_{\dot{y}} - \mathcal{F}_y = \dot{x}[(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_{\dot{x}y} + \mathcal{F}_{x\dot{y}}],$$

ar relaţia căutată se va scrie

$$\dot{x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_{\dot{x}} - \mathcal{F}_x\right) + \dot{y}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_{\dot{y}} - \mathcal{F}_y\right) = 0.$$

Prin urmare, în locul sistemului (3.30′) se poate considera, de exemplu, egalitatea

$$(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_{x\dot{y}} + \mathcal{F}_{\dot{x}y} = 0,$$

care, deoarece raza de curbură r a extremalei este dată de egalitatea

$$r = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}},$$

se va scrie sub forma

$$\frac{1}{r} = \frac{\mathcal{F}_{x\dot{y}} - \mathcal{F}_{y\dot{x}}}{\mathcal{F}_1 \cdot (x^2 + y^2)^{3/2}},$$

numită *forma lui Weierstrass a ecuaţiei lui Euler*, care este avantajoasă uneori în calcule. Dacă, de exemplu,

$$I^*[x, y] = \int_{t_0}^{t_1} [\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \lambda(x\dot{y} - y\dot{x})]\,\mathrm{d}t, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

deoarece $\mathcal{F} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \lambda(x\dot{y} - y\dot{x})$, se deduce uşor egalitatea $r = 2\lambda$, care va înlocui ecuaţia lui Euler pentru funcţionala

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} [\sqrt{1 + y'^2} + \lambda(xy' - y)]\,\mathrm{d}x.$$

Rezultă că extremalele au curbura constantă : vor fi arce de cerc.

3.8. Probleme variaționale cu condiții suplimentare

3.8.1. Probleme variaționale de tip Lagrange

Vom încadra în această categoria probleme de tipul următor:
Se cer extremalele funcționalei

$$I[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]\, dt, \tag{3.31}$$

care verifică atît condițiile la limită bilocale

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1, \ \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n, n \geqslant 2, \tag{3.31}$$

cît și condițiile suplimentare

$$G_j[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)] = 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, p, \ \ p \geqslant 1, \tag{3.31''}$$

în care $G_1, \ldots, G_p$ sînt funcții date, de o clasă convenabilă C^r, $r \geqslant 2$; dacă în condițiile suplimentare (3.31″) nu apar derivatele $\dot{\mathbf{x}}$, acestea se numesc *condiții olonome* iar apariția acestor derivate face ca aceste condiții să se numească *neolonome*. Vom presupune aceste condiții distincte între ele.

O primă observație care poate fi făcută este că întotdeauna $p < n$, deoarece dacă, de exemplu, $p = n$, condițiile (3.31″) (în cazul neolonom) pot fi interpretate ca un sistem format cu n ecuații diferențiale, funcțiile fiind $x_1, \ldots, x_n$, care integrat va conduce la definirea funcțiilor $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, care dacă vor verifica și condițiile (3.31′) vor da funcționalei (3.31) o anumită valoare, deci nu poate fi vorba de o problemă de extrem [în cazul olonom, pentru $p = n$, problema este, în general, imposibilă, deoarece din (3.31″) se deduce $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, iar condițiile (3.31′) nu pot fi satisfăcute].

Probleme variaționale de tip Lagrange apar frecvent în practică, cel mai simplu exemplu constituindu-l problema geodezicelor pe o suprafață din $\mathbb{R}^n$; astfel dacă suprafața în cauză are ecuația carteziană $F(\mathbf{x}) = 0$, adică $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, iar P_1 și P_2 sînt două puncte pe această suprfață [deci dacă coordonatele acestor puncte sînt $\mathbf{x}^1$ și $\mathbf{x}^2$, avem $F(\mathbf{x}^1) = 0$, $F(\mathbf{x}^2) = 0$], geodezica este acea

curbă de pe suprafață care realizează minimul distanței dintre P_1 și P_2. Problema variațională corespunzătoare va fi

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \ldots + \dot{x}_n^2}\, dt \to \min, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^1, \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^2, \ F[\mathbf{x}(t)] = 0.$$

Problemele variaționale de tip Lagrange se pot rezolva cu ajutorul următoaei teoreme:

Teorema 3.6 (*teorema lui Lagrange*). *Dacă problema* (3.31), (3.31′), (3.31″) *admite soluții, atunci funcțiile* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ *vor fi și extremalele funcționalei*

$$J[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{L}[t, \ \mathbf{x}(t), \ \dot{\mathbf{x}}(t)]\, dt \tag{3.32}$$

în care lagrangianul $\mathscr{L}$ *este definit prin*

$$\mathscr{L}(t, \ \mathbf{x}, \ \dot{\mathbf{x}}) = L(t, \ \mathbf{x}, \ \dot{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)\, G_j(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \tag{3.33}$$

(*funcțiile* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *definite pe* $[t_0, t_1]$ *se numesc multiplicatori ai lui Lagrange*) *și care verifică numai condițiile la limită bilocale* (3.31′).

⌈ Vom folosi notația variațională iar condițiile suplimentare (3.31″) arată că funcțiile $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ nu pot fi toate arbitrare. Într-adevăr, explicitînd din aceste condiții pe $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_p$ (ceea ce este posibil deoarece, funcțiile $G_1, \ldots, G_p$ fiind presupuse distincte, avem $\dfrac{\partial(G_1, \ldots, G_p)}{\partial(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_p)} \neq 0$, ceea ce permite aplicarea teoremei funcțiilor implicite), prin integrare, se vor obține funcțiile $x_1, \ldots, x_p$, ceea ce implică faptul că numai funcțiile $\delta x_{p+1}, \ldots, \delta x_n$ sînt arbitrare. Să alegem funcțiile $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ astfel încît

$$G_j(t, \mathbf{x} + \varepsilon\delta\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} + \varepsilon\dot{\delta\mathbf{x}}) = 0, \ j = 1, \ 2, \ldots, p, \ 1 \leqslant p < n,$$

pentru orice ε (suficient de mic); deoarece funcțiile $G_1, \ldots, G_p$ sînt de clasă C^2, vom avea

$$0 = G_j(t, \mathbf{x} + \varepsilon\delta\mathbf{x}, \ \dot{\mathbf{x}} + \varepsilon\dot{\delta\mathbf{x}}) - G_j(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial G_j}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial G_j}{\partial \dot{x}_k} \dot{\delta} x_k \right) + \alpha_j$$

şi deoarece $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\alpha_j}{\varepsilon} = 0$, rezultă egalităţile

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial G_j}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial G_j}{\partial \dot{x}_k} \delta \dot{x}_k \right) = 0, \qquad j = 1, \ldots, p,$$

care, înmulţite cu $\lambda_j(t)$ şi integrate, vor conduce, prin însumare, la egalitatea integrală

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) \frac{\partial G_j}{\partial x_k} \delta x_k + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(t) \frac{\partial G_j}{\partial \dot{x}_k} \delta \dot{x}_k \right] dt = 0. \qquad (3.34)$$

Cum funcţionala (3.31) admite funcţiile $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ca extremale, vom avea

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \delta \dot{x}_k \right) dt = 0,$$

egalitate care adunată cu (3.34) conduce la o nouă egalitate:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j(t) \frac{\partial G_j}{\partial x_k} \right\} \delta x_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j(t) \frac{\partial G_j}{\partial \dot{x}_k} \delta \dot{x}_k \right] dt = 0$$

care, în baza notaţiei (3.33), se va scrie

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_k} \delta \dot{x}_k \right) \right] dt = 0; \qquad (3.34')$$

integrînd prin părţi şi utilizînd notaţia uzuală $\mathscr{L}_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_k}$; deoarece, în baza condiţiilor (3.31′), avem $\delta \mathbf{x} = 0$ pentru $t = t_0$ şi $t = t_1$, din (3.34′) se deduce egalitatea

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=1}^{p} \mathscr{L}_k \delta x_k + \sum_{m=p+1}^{n} \mathscr{L}_m \delta x_m \right) dt = 0 \qquad (3.34'')$$

valabilă dacă $\mathbf{x}$ se înlocuieşte prin soluţia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ a problemei în studiu. Alegînd multiplicatorii $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ astfel încît

$$\mathscr{L}_1 = 0, \ldots, \mathscr{L}_p = 0, \qquad (3.35)$$

din (3.34″) se deduce

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{m=p+1}^{n} \mathscr{L}_m \delta x_m \right) dt = 0;$$

cum funcţiile $\delta x_{p+1}, \ldots, \delta x_n$ sînt arbitrare, ultima egalitate (în baza teoremei 3.3) arată că neapărat

$$\mathscr{L}_{p+1} = 0, \ldots, \mathscr{L}_n = 0$$

pentru soluţiile problemei în cauză. Aceste ultime egalităţi, împreună cu (3.35) demonstrează teorema. ⌟

Prin urmare, practic, o problemă variaţională de tip Lagrange se poate rezolva în modul următor: se consideră funcţiile $\lambda_1(t), \ldots$ $\ldots, \lambda_p(t)$ (de clasă C^1), cu ajutorul cărora se formează lagrangianul

$$\mathscr{L}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda) = L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j(t) G_j(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}),$$

şi apoi se integrează sistemul Euler-Lagrange

$$\mathscr{L}_1 = 0, \ldots, \mathscr{L}_n = 0, \ \mathscr{L}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_j},$$

ale cărui soluţii vor depinde de $2n$ constante de integrare şi de multiplicatorii $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$; utilizînd apoi cele $2n + p$ condiţii (3.31′) şi (3.31″), aceşti parametri pot fi determinaţi.

Exemple. 29. Să se găsească distanţa minimă dintre punctele $(1, 1, 1)$ şi $(-1, 2, 1)$ aflate pe suprafaţa $x + y - z = 1$ (curba de-a lungul căreia se realizează acest minim trebuie evident să aparţină planului $x + y - z = 1$).

Va trebui deci să aflăm minimul funcţionalei

$$I[y, z] = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}\, dx$$

(dacă se consideră reprezentarea carteziană a acestor curbe) astfel incit

$$y(-1) = 2,\ z(-1) = -1,\ y(1) = 1,\ z(1) = 1$$

iar

$$x + y(x) - z(x) = 1\,;$$

se obține o problemă variațională de tip Lagrange, cu

$$L = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}, \qquad G = x + y - z - 1,$$

ceea ce inseamnă că se poate utiliza lagrangianul

$$\mathcal{L} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)\,(x + y - z - 1).$$

Sistemul Euler-Lagrange corespunzător se scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) - \lambda = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) + \lambda = 0$$

și se poate integra ușor ; eliminind λ se deduce ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y' + z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0, \text{ deci } \frac{y' + z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = c_1,$$

care, deoarece $y' - z' = -1$ (din ecuația $x + y - z = 1$), se va scrie

$$\frac{2y' + 1}{\sqrt{1 + y'^2 + (y' + 1)^2}} = c_1.$$

Explicitind y', se găsește $y' = a$, deci $y(x) = ax + b$ și cum $y(-1) = 2$, $y(1) = 1$ găsim

$$y(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x,$$

iar din egalitatea $z' = y' + 1$ și condițiile $z(-1) = z(1) = 1$ rezultă

$$z(x) = 1.$$

Așadar, minimul căutat se realizează pe segmentul dreptei $x + 2y = 3$, $z = 1$, cuprins între punctele $(-1, 2, 1)$ și $(1, 1, 1)$ și este egal cu

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{5}$$

(valoare care se verifică și direct calculind distanța din $\mathbb{R}^3$ dintre aceste puncte).

30. *Geodezicele pe suprafețe din* $\mathbb{R}^3$. Problemele variaționale de forma

$$I[y, z] = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}x \to \min,$$

$$y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0,\ y(x_1) = y_1, \quad y(x_1) = y_1,$$

$$F(x, y, z) = 0, \quad F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F(x_1, y_1, z_1) = 0$$

definesc geodezicele $y = y(x)$, $z = z(x)$ pe suprafața S definită prin ecuația carteziană $F = 0$; această problemă a lui Lagrange, în baza teoremei 3.6, se poate rezolva cu ajutorul extremalelor funcționalei

$$J[y, z] = \int_{x_0}^{x_1}\left(\sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)} + \lambda(x)\,F[x, y(x), z(x)]\right)\mathrm{d}x.$$

Or sistemul Euler-Lagrange atașat acestei funcționale este de obicei dificil de integrat și de aceea, uneori, este mai comod să se utilizeze o altă cale ; astfel, se știe că dacă prima formă fundamentală a suprafeței S este

$$\mathrm{d}s^2 = E(u, v)\,\mathrm{d}u^2 + 2F(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G(u, v)\,\mathrm{d}v^2,$$

în ipoteza că are ecuațiile parametrice

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D_2,$$

atunci dacă $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, sint ecuațiile unei curbe aflate pe S avind capetele în punctele P_0, $P_1 \in S$, P_0 și P_1 fiind definiți prin coordonatele (x_0, y_0, z_0) și (x_1, y_1, z_1) [cu $x_0 = x(u_0, v_0), \ldots, z_1 = z(u_1, v_1)$, $u_0 = u(t_0), \ldots, v_1 = v(t_1)$], lungimea acestei curbe va fi

$$l = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{E\,u'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Presupunind l funcțională, $l = l[u, v]$, geodezica se va obține cu ajutorul unei probleme variaționale obișnuite (fără condiții suplimentare)

$$l[u, v] \to \min,$$

$$u(t_0) = u_0, \quad u(t_1) = u_1, \quad v(t_0) = v_0, \quad v(t_1) = v_1\,;$$

reamintim că

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

În particular, in cazul geodezicelor pe sfera

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

deoarece

$$x = x_0 + R\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = y_0 + R\sin\theta\sin\varphi, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$
$$z = z_0 + R\cos\theta,$$

rezultă $E = R^2 \sin^2\theta$, $F = 0$, $G = R^2$ și deci trebuie găsite extremalele funcționalei

$$l[\theta, \varphi] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{R^2 \sin^2 \theta \varphi'^2 + R^2 \theta'^2}\, dt,$$

dacă $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Presupunind $t = \theta$, funcționala devine

$$l[\varphi] = \int_{\theta_0}^{\theta_1} R\sqrt{1 + \sin^2 \theta\, \varphi'^2 (\theta)}\, d\theta \to \min.$$

Ecuația lui Euler corespunzătoare se scrie

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \varphi'^2 \sin^2 \theta)}}\right) = 0,$$

de unde, explicitindu-l pe φ', se deduce ecuația diferențială simplă

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{c}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - c^2}} = -\frac{c\,(\mathrm{ctg}\theta)'}{\sqrt{1 - c^2 - c^2 \mathrm{ctg}^2 \theta}}$$

care integrată conduce la

$$\varphi(\theta) = \arccos\left(\frac{c\, \mathrm{ctg}\, \theta}{\sqrt{1 - c^2}}\right) + \varphi_0.$$

Calcule simple duc la ecuația

$$R \cos\theta = aR \sin \theta \cos \varphi + bR \sin\theta \sin \varphi$$

sau, în coordonate carteziene,

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

obținindu-se ecuația unui plan care trece prin centrul sferei, ceea ce înseamnă că geodezicele pe sferă sînt arce de cercuri mari ale sferei (cele două puncte distincte de pe sferă împreună cu centrul sferei definesc un plan care intersectează sfera după un cerc mare).

3.8.2. Probleme izoperimetrice

Denumirea de *problemă izoperimetrică* se utilizează în cazul determinării optimului funcționalelor,

$$I[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]\, dt \tag{3.36}$$

știind că acest optim $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, verifică atît condițiile la limită

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1,\ \ \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n, \tag{3.36'}$$

cît și condițiile suplimentare

$$\int_{t_0}^{t_1} G_j\, [t,\ x(t),\ \dot{x}(t)]\, dt = a_j,\ j = 1, \ldots, m,\ a_j \in \mathbb{R}, \tag{3.36''}$$

denumite *condiții izoperimetrice*; numărul m de condiții (3.36'') este oarecare, iar L, $G_j \in C^2$.

Problemele izoperimetrice pot fi rezolvate cu ajutorul rezultatului următor:

Teorema 3.7 (*Euler*). *Funcțiile* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, *care realizează un optim pentru funcționala* (3.36) *în cndițiile* (3.36') *și* (3.36''), *realizează în același timp optimul funcționalei*

$$I^*[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)] + \sum_{j=1}^{m} \mu_j G_j\, [t,\ \mathbf{x}(t),\ \dot{\mathbf{x}}(t)] \right\} dt \tag{3.37}$$

în condițiile (3.36'); $\mu_1, \ldots, \mu_m$ *sînt numere reale.*

⌈ Demonstrația se realizează cu ajutorul teoremei 3.6 în modul următor: se introduc funcțiile auxiliare $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, definite prin

$$y_j(t) = \int_{t_0}^{t} G_j[s,\ \mathbf{x}(s),\ \dot{\mathbf{x}}(s)]\, ds, \tag{3.38}$$

în ipoteza că $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, reprezintă soluția problemei izoperimetrice în cauză; din (3.38) se deduc condițiile neolonome suplimentare

$$\dot{y}_j(t) - G_j[t,\ \mathbf{x}(t),\ \dot{\mathbf{x}}(t)] = 0 \tag{3.38'}$$

pe care le verifică funcțiile $\mathbf{y}$ în afara condițiilor bilocale

$$y_j(t_0) = 0,\ y_j(t_1) = a_j,\ \ j = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.38''}$$

deduse din (3.38) și (3.36''). Se deduce că problema izoperimetrică în studiu este echivalentă cu problema variațională de tip Lagrange (3.36), (3.38'), (3.36') și (3.38'') în care apar $n + m$ funcții necunoscute $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m$ și m condiții suplimentare; deoarece $n \geqslant 1$, întotdeauna $m < m + n$ și teorema 3.6 este aplicabilă.

Se formează deci langrangianul auxiliar

$$\mathscr{L}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}) = L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) [\dot{y}_j - G_j(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})], \quad (3.39)$$

a cărui sistem Euler-Lagrange este

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial G_j}{\partial \dot{x}_k}\right) -$$

$$- \frac{\partial L}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t) \frac{\partial G_j}{\partial x_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \quad (3.39')$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}_l}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_l} = \frac{d}{dt}(\lambda_l) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, m; \quad (3.39'')$$

din sistemul (3.39″) se deduce $\lambda_j = \text{const}$, $j = 1, \ldots, m$, și notînd $\lambda_j = -\mu_j$, $j = 1, \ldots, m$, înlocuindu-i în sistemul (3.39′), se va obține sistemul Euler-Lagrange pentru lagrangianul din funcționala (3.37). ⌋

Așadar, practic o problemă izoperimetrică se poate rezolva căutînd extremalele funcționalei (3.37) în condițiile la capete (3.36′); soluțiile sistemului Euler-Lagrange corespunzător vor conține $2n + m$ parametri (deoarece se pleacă din start cu parametrii $\mu_1, \ldots, \mu_m$ iar prin integrare se vor obține $2n$ constante), care se vor determina cu ajutorul condițiilor (3.36′) și (3.36″).

Exemple. 31. Să găsim optimul funcționalei

$$I[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2)\, dx$$

în condițiile bilocale

$$y(0) = 0,\ y(1) = 1,\ z(0) = 0,\ z(1) = 1$$

și în condițiile izoperimetrice

$$\int_0^1 (z + xz')\, dx = 1, \quad \int_0^1 (y'^2 - z'^2 - xy')\, dx = 2.$$

Față de cazul general, avem $n = 2$ și $m = 2$ iar

$$L = y'^2 + z'^2,\ G_1 = z + xz',\ G_2 = y'^2 - z'^2 - xy';$$

conform cu teorema 3.7, se ia în considerație lagrangianul

$$\mathscr{L} = y'^2 + z'^2 + \lambda(z + xz') + \mu(y'^2 - z'^2 - xy')$$

și se obține sistemul Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx}(2y' + 2\mu y' - \mu x) = 0, \qquad \frac{d}{dx}(2z' - 2\mu z' + \lambda x) - \lambda = 0,$$

care se poate integra odată direct; se deduce sistemul diferențial

$$y' = \frac{\mu}{2(1 + \mu)} x + c_1,\ z' = c_2$$

care se integrează imediat și deci

$$y(x) = \frac{\mu x^2}{4(1 + \mu)} + c_1 x + c_3, \quad z(x) = c_2 x + c_4.$$

În baza condițiilor la limită se găsește $c_3 = c_4 = 0$, $c_2 = 1$, $c_1 = \dfrac{4 + 3\mu}{3 + 4\mu}$, deci

$$y(x) = \frac{\mu x^2 + (3\mu + 4)x}{4(1 + \mu)}, \quad z(x) = x;$$

condiția $\int_0^1 (z + xz')\, dx = 1$ se verifică direct iar condiția $\int_0^1 (y'^2 - z'^2 - xy') dx = 2$ conduce la determinarea parametrului μ; calcule simple conduc la ecuația algebrică $121\mu^2 + 242\mu - 120 = 0$ ale cărei rădăcini sînt $\mu_1 = -\frac{10}{11}$ și $\mu_2 = -\frac{12}{11}$ iar numai μ_1 va verifica condițiile izoperimetrice date. În concluzie, extremalele problemei izoperimetrice date vor fi

$$y(x) = -\frac{5}{2} x^2 + \frac{7}{2} x, \qquad z(x) = x.$$

32. *Problema Didonei* constă în determinarea curbelor plane γ închise, rectificabile avînd lungimea $2l$, care închid în interior aria maximă; dacă

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} x(t_0) = x(t_1) \\ y(t_0) = y(t_1) \end{array}\right\}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

sînt ecuațiile parametrice ale curbei căutate, problema în cauză revine la determinarea funcțiilor $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, care optimizează integrala

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (x\dot{y} - \dot{x}y) dt$$

(A reprezintă aria domeniului mărginit de curba γ), astfel încît

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt = 2l.$$

Utilizînd teorema 3.7, se ia în considerație lagrangianul

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) + \mu\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

și deoarece acesta coincide, abstracție făcînd de un factor multipicativ constant, cu lagrangianul din exemplul 28 $\left(\text{avem } \mathcal{L} = \mu\mathcal{F},\ \mu = \frac{1}{2\lambda}\right)$, extremalele vor fi cercuri de rază $\frac{l}{\pi}$ cu centrul arbitrar în plan.

33. *Problema lui Kelvin.* În planul $\mathbb{R}^2$ se definește cu ajutorul funcției continue $\mu = \mu(x, y)$ o anumită distribuție de mase; punctele P_0 și P_1 din $\mathbb{R}^2$ sînt unite printr-o curbă dată C și curbele $\{\gamma\}$, avînd lungime dată l; să se determine γ astfel încît domeniul plan D care are frontiera $C \cup \gamma$ să aibă masa maximă (punctele P_0 și P_1 pot coincide dar l depășește distanța dintre punctele P_0 și P_1).

Această problemă se poate rezolva cu ajutorul teoremei 3.7 în modul următor: fie $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, ecuațiile parametrice ale curbei γ și fie $f = f(x, y)$, funcția definită astfel încît

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} \mu(t, y)\, \mathrm{d}t.$$

Deoarece f este cunoscută în $\mathbb{R}^2$ și este derivabilă în raport cu x, punînd

$$k = \int_C f(x, y)\, \mathrm{d}y,$$

k va fi un număr real; calculînd integrala curbilinie pe $\partial D = C \cup \gamma$ din f, cu ajutorul formulei lui Green se va obține

$$\int_{\gamma \cup C} f(x, y)\, \mathrm{d}y = \int_C f\, \mathrm{d}y + \int_\gamma f\, \mathrm{d}y = k + \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t)]\, \dot{y}(t)\, \mathrm{d}t =$$

$$= \iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_D \mu(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

ceea ce înseamnă că deoarece $\iint_D \mu(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ este un număr real, problema va fi rezolvată dacă se obține optimul funcționalei

$$I[x, y] = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t)]\, \dot{y}(t)\, \mathrm{d}t$$

cu restricțiile

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, \mathrm{d}t = l,$$

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ x(t_1) = x_1,\ y(t_1) = y_1,$$

unde (x_0, y_0) și (x_1, y_1) sînt coordonatele punctelor P_0 și P_1. Aplicînd teorema lui Euler, se consideră lagrangianul

$$\mathcal{L} = f(x, y)\, \dot{y} + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

care fiind pozitiv omogen de gradul întîi, este convenabil să utilizăm ecuația Euler scrisă sub forma lui Weierstrass (vezi exemplul 28); deoarece

$$\mathcal{L}_{x\dot{y}} = \frac{\partial f}{\partial x} = \mu,\quad \mathcal{L}_{y\dot{x}} = 0,\quad \mathcal{L}_1 = \frac{\mathcal{L}_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = \frac{\lambda}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

se deduce ecuația lui Euler

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{\lambda},$$

r fiind raza de curbură a extremalei.

În particular, dacă distribuția μ este constantă, raza de curbură va fi constantă iar γ va fi arcul de cerc avînd lungimea l care trece prin punctele P_0 și P_1.

34. *Poziția de echilibru a unui fir omogen greu sub acțiunea gravității* se poate obține cu ajutorul unei probleme izoperimetrice dacă se utilizează principiul care afirmă că într-o astfel de poziție energia potențială a firului este minimă; într-adevăr, presupunînd firul de lungime l fixat în punctele P_0 și P_1 din $\mathbb{R}^2$(l fiind mai mare decît distanța dintre aceste puncte), dacă $y = y(x)$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, este ecuația carteziană a unei curbe cu extremitățile în $P_0(x_0, y_0)$ și $P_1(x_1, y_1)$, va trebui să avem

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x = l. \tag{3.40}$$

Deoarece energia potențială U a firului se poate calcula prin relația

$$U = \rho g \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x$$

(ρ fiind masa firului raportată la unitatea de lungime iar g este accelerația gravitațională), poziția de echilibru este realizată de graficul funcției $y = y(x)$ care optimizează funcționala $U = U[y]$ cu restricțiile (3.40) și $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. Această problemă izoperimetrică se rezolvă cu ajutorul lagrangianului

$$\mathcal{L} = \rho g y\sqrt{1 + y'^2} + \mu\sqrt{1 + y'^2},$$

în care, deoarece ρ și g sînt constante, se poate presupune $\mu = \lambda\rho g$ și deci se poate utiliza un alt lagrangian

$$\mathcal{L}_1 = y\sqrt{1 + y'^2} + \lambda\sqrt{1 + y'^2} = (y + \lambda)\sqrt{1 + y'^2};$$

ecuația lui Euler va fi

$$\mathcal{L}_1 - y'\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial y'} = a, \qquad a \in \mathbb{R},$$

adică

$$y + \lambda = a\sqrt{1 + y'^2}.$$

Notind $y' = \text{sh}\, t$, avem $y = -\lambda + a \,\text{ch}\, t$ și deoarece $\text{d}x = \dfrac{\text{d}y}{\text{sh}\, t} = a\, \text{d}t$, rezultă $x = at + b$, $b \in \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că $y = -\lambda + a\, \text{ch}\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$, parametrii λ, a și b determinîndu-se din restricțiile problemei : curba să aibă lungimea l și să treacă prin punctel P_0 și P_1. Așadar poziția de echilibru este obținută cu ajutorul graficului unei funcții elementare, care poartă denumirea de *lănțișor*.

3.8.3. Ecuația Euler-Poisson

În anumite aplicații practice apar probleme privind optimizarea unor funcționale de forma

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} L[x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)]\, \text{d}x,\ n \geqslant 2, \qquad (3.41)$$

deci funcționale al căror lagrangian depinde de derivatele de ordin superior ale lui y. În acest caz se poate demonstra.

Teorema 3.8 (*Poisson*). *Dacă în* (3.41) L *este de clasă* $n+1$ *în toate argumentele sale iar* $y \in C^{2n}([x_0, x_1])$ *și verifică la capete condiții de forma*

$$\begin{aligned} &y(x_0) = a_0,\ \ y'(x_0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}, \\ &y(x_1) = b_0,\ \ y'(x_1) = b_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_1) = b_{n-1}, \end{aligned} \qquad (3.41')$$

cu $a_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$, *atunci funcțiile* y *care optimizează funcționala* (3.41) *este soluție a ecuației diferențiale de ordin* $2n$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\text{d}}{\text{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + \frac{\text{d}^2}{\text{d}x^2}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y'}\right) - \ldots + (-1)^n \frac{\text{d}^n}{\text{d}x^n}\left(\frac{\partial L}{\partial y^{(n)}}\right) = 0, \qquad (3.42)$$

numită ecuația Euler-Poisson atașată funcționalei considerate.

┌ Pentu ușurința calculelor vom presupune $n = 2$, cazul $n > 2$ tratîndu-se complet analog ; notînd $y' = z$, $y'' = z'$, rezultă că trebuie optimizată funcționala

$$I[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} L[x, y(x), z(x), z'(x)]\, \text{d}x$$

în condiția suplimentară $y' - z = 0$ și condițiile la capete

$$y(x_0) = a_0,\ y(x_1) = b_0,\ z(x_0) = a_1,\ z(x_1) = b_1.$$

S-a obținut o probemă variațională de tip Lagrange și deci, în baza teoremei 3.6, se ia în considerație lagrangianul

$$\mathscr{L}(x, y, z, y', z') = L(x, y, z, z') + \lambda(x)(y' - z),$$

care conduce la sistemul Euler-Lagrange

$$\frac{\text{d}}{\text{d}x}[\lambda(x)] - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\text{d}}{\text{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial z'}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial z} + \lambda\right) = 0.$$

Derivînd ultima ecuație în raport cu x și ținînd seama de prima ecuație, se elimină λ. Scriind y'' și y' în loc de z' și z, se deduce egalitatea

$$\frac{\text{d}^2}{\text{d}x^2}\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right) - \frac{\text{d}}{\text{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) + \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

care este ecuația Euler-Poisson (3.42) pentru $n = 2$. ┘

Exemple. 35. În cazul funcționalei

$$I[y] = \int_0^1 [y''^2 + 2y'^2 + y^2 + f(x)]\, \text{d}x$$

ecuația lui Euler va fi

$$y^{IV} - 2y'' + y = 0$$

și deci extremalele sînt

$$y(x) = (c_1 x + c_2)\exp(x) + (c_3 x + c_4)\exp(-x),$$

constantele c_1, c_2, c_3 și c_4 determinîndu-se din condițiile

$$y(0) = a_0,\ y'(0) = a_1,\ y(1) = b_0,\ y'(1) = b_1.$$

36. *Încovoierea unei grinzi omogene elastice, grele, încastrate la capele.* Dacă grinda are lungimea $2l$ iar sistemul de axe este ales astfel încît axa absciselor să coincidă cu axa de simetrie a grinzii iar axa Oy este perpendiculară pe mijlocul acesteia, condițiile de încastrare se scriu

$$y(-l) = 0,\ y'(-l) = 0,\ y(l) = 0,\ y'(l) = 0,$$

dacă ecuația axei grinzii este $y = y(x)$. Notînd cu ρ masa grinzii raportată la unitatea de lungime și prin ds elementul de arc deformat al axei grinzii, energia potențială a grinzii este compusă din suma a doi factori : energia potențială de deformație și energia potențială gravitațională ; primul factor este egal cu $\frac{1}{2} a \int_{-l}^{+l} \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 ds$, unde a este un coeficient *care depinde de modulul de elasticitate și de forma grinzii* iar φ este unghiul format de tangenta la graficul funcției $y = y(x)$ cu axa Ox $\left[\text{deci } \frac{d\varphi}{ds} \text{ este curbura curbei } y = y(x)\right]$ iar celălalt factor este egal cu $\int_{-l}^{+l} \rho y \, ds$.

Prin urmare, utilizînd faptul că in poziția de echilibru energia potențială este minimă, problema va fi *rezolvată dacă* se află *optimul* funcționalei

$$I[y] = \int_{-l}^{+l} \left[\frac{1}{2} a \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \rho y \right] ds = \int_{-l}^{+l} \left[\frac{a}{2} \frac{y''^2}{(1 + y'^2)^{3/2}} + \rho y \sqrt{1 + y'^2} \right] dx,$$

deci trebuie scrisă ecuația Euler-Poisson corespunzătoare ; or aceasta fiind complicată, vom considera doar micile deformații ale grinzii, ceea ce înseamnă că y'^2 poate fi neglijat. Se consideră astfel funcționala

$$I^*[x] = \int_{-l}^{+l} \left(\frac{a}{2} y''^2 + \rho y \right) dx,$$

a cărei ecuație Euler-Poisson este $y^{IV} = -\frac{\rho}{a}$ și deci extremalele vor fi

$$y(x) = -\frac{\rho}{24a} x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 ;$$

iar condițiile la limită conduc la soluția finală

$$y(x) = -\frac{\rho}{24a} (x^2 - l^2)^2.$$

3.9. Probleme variaționale cu frontieră variabilă

În majoritatea cazurilor, problemele practice care se rezolvă cu ajutorul principiilor calculului variațiilor impun anumite condiții pe care trebuie să le verifice extremalele la capete ;cele mai simple condiții la capete sînt condițiile bilocale (în cazul funcționalelor $I[\mathbf{x}]$). Dar chiar dacă la capetele extremalelor nu sînt impuse condiții, condiția de extrem impune în mod obligatoriu condițiile care trebuie verificate pentru $t = t_0$ și $t = t_1$; în acest mod apar condi-

țiile la limită naturale cînd extremitățile extremalelor se află în planele $t = t_0$ și $t = t_1$ din $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sînt posibile însă și probleme în care extremalele nu au capete fixe și nici nu pot fi utilizate condițiile la limită naturale ; de exemplu dacă pe o sferă se consideră două curbe fără puncte comune și se pune problema determinării distanței minime (măsurate pe sferă) dintre aceste două curbe, această distanță va fi realizată pe un arc de cerc mare (vezi exemplul 30) dar pentru a rezolva efectiv această problemă mai trebuie găsite punctele de intersecție ale acestor trei curbe.

Vom conveni să numim problemele variaționale de acest tip *probleme cu frontieră variabilă*, iar determinarea condițiilor care trebuie impuse la capetele extremalelor în această situație se realizează cu ajutorul condiției necesare de extrem.

Luînd în considerare cazul cel mai simplu al funcționalei

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} L[x, y(x), y'(x)] \, dx \tag{3.43}$$

în care mulțimea admisibilă de funcții M este formată din curbe care trec prin punctul (x_0, y_0) iar celălalt capăt se află pe curba $y = g(x)$, adică $y(x_1) = g(x_1)$ dacă $y(x)$, $x \in [x_0, x_1]$, este funcția care realizează optimul funcționalei (3.43) ; în baza rezultatelor din 3.2, funcția y va verifica egalitatea

$$(DI)(y, h) = 0 \tag{3.44}$$

pentru orice h cu proprietatea că $y + th \in M$ pentru $|t|$ suficient de mic, unde DI este prin definiție dat de

$$(DI)(y, h) = \frac{\partial}{\partial t} I\, [y + th] \Big|_{t=0} . \tag{3.44'}$$

În cazul de față

$$I(y + th) = \int_{x_0}^{x_1(t)} L[y, x(t) + t\, h(x), y'(x) + th'(x)] \, dx, \quad x_1(0) = x_1$$

deoarece limita superioară nu poate fi considerată fixată ; utilizînd (3.44'), se obține

$$(DI)(y, h) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial L}{\partial y} h + \frac{\partial L}{\partial y'} h' \right) dx + x_1'(0) L\, [x_1, y(x_1), y'(x_1)], \tag{3.44''}$$

ultimul termen fiind o consecinţă a faptului că limita superioară depinde de t*). Deoarece limita superioară se află simultan atît pe curba $y = g(x)$ (numită *curbă transversală*) cît şi pe curba $y = y(x) + t\,h(x)$, se obţine egalitatea

$$g[x_1(t)] = y[x_1(t)] + t\,h[x_1(t)],$$

care, în baza derivabilităţii funcţiilor g, y, h şi x_1, conduce prin derivare în raport cu t la egalitatea

$$g'(x_1)\,x_1'(0) = y_1(x_1)\,x_1'(0) + h(x_1),$$

deoarece $x_1(0) = x_1$; se obţine valoarea

$$x_1'(0) = \frac{h(x_1)}{g'(x_1) - y'(x_1)},$$

care, înlocuită în (3.44''), după o integrare prin părţi, va conduce la egalitatea

$$(DI)(y, h) = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\right] h(x)\,\mathrm{d}x + $$
$$+ \left(\frac{\partial L}{\partial y'} + \frac{1}{g' - y'}\,L\right) h\Big|_{x=x_1}, \qquad (3.44''')$$

întrucît $h(x_0) = 0$. Deoarece trebuie verificat (3.44) pentru orice h (care verifică ipotezele amintite), vom avea $(DI)(y, h) = 0$ şi pentru acei h care verifică $h(x_1) = 0$ şi va rezulta că $y = y(x)$ trebuie să verifice ecuaţia lui Euler [ceea ce înseamnă că $y(x)$ este efectiv o extremală a funcţionalei în cauză], iar atunci din condiţia necesară de extrem şi din (3.44''') se deduce că pentru $x = x_1$ trebuie verificată egalitatea

$$\left(\frac{1}{g'(x_1) - y(x_1)}\,L[x_1,\ y(x_1), y'(x_1)] + \frac{\partial L\,[x_1,\ y(x_1),\ y'(x_1)]}{\partial y'}\right) h(x_1) = 0,$$

*) S-a utilizat următoarea regulă de derivare:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^{x_1(t)} f(x, s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x_1(t)} \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}s + x'(t)\,f[x,\ x_1(t)].$$

adică, cum $h(x_1) \neq 0$, avem

$$[g'(x_1) - y(x_1)]\,\frac{\partial L[x_1,\ y(x_1),\ y'(x_1)]}{\partial y'} + L[x_1,\ y(x_1),\ y'(x_1)] = 0. \quad (3.45)$$

Această ultimă egalitate se numeşte *condiţia de transversalitate* ataşată funcţionalei (3.43) (pentru $x = x_1$) şi va înlocui fie condiţia $y(x_1) = y_1$ (care apare în cazul capetelor fixe), fie condiţia $\frac{\partial L\,[x_1,\ y(x_1),\ y'(x_1)]}{\partial y'} = 0$ (care apare în cazul condiţiilor la limită naturale); trebuie de remarcat că în egalitatea (3.45) y se înlocuieşte cu acea extremală a funcţionalei (3.43), care verifică $y(x_0) = y_0$, iar x_1 se obţine prin rezolvarea ecuaţiei $y(y_1) = g(x_1)$.

Deoarece pentru $x = x_0$ se pot face aceleaşi consideraţii (dacă x_0 nu este fixat) ca şi pentru $x = x_1$, se poate considera ca fiind demonstrată teorema următoare:

Teorema 3.9. *Dacă lagrangianul $L = L(x,\ y,\ y')$ este de clasă C^2 în toate argumentele sale iar în $\mathbb{R}^2$ se consideră curbele $y = g_1(x)$ şi $y = g_2(x)$ cu $g_1,\ g_2 \in C^1$, atunci pentru funcţionala*

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} L[x,\ y(x),\ y'(x)]\,\mathrm{d}x$$

definită pe curbele $y = y(x)$ de clasă C^2, avînd extremităţile în punctele $(x_0,\ y_0)$ şi $(x_1,\ y_1)$, $y_0 = g_1(x_0)$, $y_1 = g_2(x_1)$, se realizează un optim dacă $y(x)$ este o extremală a funcţionalei iar la extremităţi se verifică condiţiile de transversalitate

$$\left[L + (g_1' - y')\,\frac{\partial L}{\partial y'}\right]_{x=x_0} = 0, \qquad \left[L + (g_2' - y')\,\frac{\partial L}{\partial y'}\right]_{x=x_1} = 0, \quad (3.45')$$

valorile x_0 şi x_1 verificînd egalităţile

$$g_1(x_0) = y(x_0), \quad g_2(x_1) = (x_1).$$

Aşadar, pentru a rezolva o problemă variaţională cu capete libere pentru funcţionala (3.43) se poate proceda în modul următor: se integrează ecuaţia Euler corespunzătoare, obţinîndu-se extremalele $y = f(x;\ a,\ b)$, a şi b fiind constantele de integrare; parametrii a, b, x_0 şi x_1 se obţin din condiţiile de transversalitate (3.45) şi din egalităţile

$$g_1(x_0) = f(x_0;\ a,\ b), \quad g_2(x_1) = f(x_1;\ a,\ b)$$

iar în final, dacă este necesar, se calculează $I[f]$ (pentru a se obține optimul căutat).

Exemple. 37. Să găsim distanța dintre parabola $y = x^2$ și dreapta $x + y = -1$; transpunînd această problemă în cadrul variațional, va trebui să găsim minimul funcționalei

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x,$$

știind că x_0 este un punct de pe dreapta $x + y = -1$ iar x_1 se află pe parabola $y = x^2$. Deoarece extremalele funcționalei se scriu $y = ax + b$ (după cum se verifică direct integrînd ecuația lui Euler corespunzătoare, care este aici $y'' = 0$) și vom avea condițiile de contact

$$ax_0 + b = -x_0, \quad ax_1 + b = x_1^2$$

[deoarece aici $g_1(x) = -x - 1$, $g_2(x) = x^2$]; relațiile de transversalitate se scriu

$$\sqrt{1 + a^2} + (-1 - a) \cdot \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} = 0, \qquad \sqrt{1 + a^2} + (2x_1 - a) \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} = 0$$

$\left(\text{deoarece } \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \text{ iar } y' = a \right)$, ceea ce înseamnă $a = 1$ și $ax_1 = -\frac{1}{2}$, deci $x_1 = -\frac{1}{2}$. În definitiv, se deduce $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$, $x_0 = -\frac{7}{4}$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, deci $y = x + \frac{3}{4}$ și distanța căutată va fi

$$\int_{-7/4}^{-1/2} \sqrt{1 + 1}\, \mathrm{d}x = \frac{5}{4}\sqrt{2}.$$

38. Să găsim semnificația condițiilor de transversalitate în cazul funcționalei

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x,$$

f fiind o funcție cunoscută, nenulă; din (3.45′) se deduc ușor egalitățile $(g_1' y')(x_0) + 1 = 0$, $(g_2' y')(x_1) + 1 = 0$, adică

$$y'(x_0) = -\frac{1}{g_1'(x_0)}, \quad y'(x_1) = -\frac{1}{g_2'(x_1)},$$

ceea ce înseamnă că aici condițiile de transversalitate sînt condiții de ortogonalitate între transversală și extremală.

Combinînd teorema 3.9 cu rezultatele din 3.7.2, se ajunge la concluzia că simbolul δ utilizat la calculul variației întîi generală a funcționalelor de forma $I[\mathbf{x}]$ poate fi interpretat ca un operator

de derivare pe curbele transversale; într-adevăr, făcînd în (3.29) $n = 1$, se găsește egalitatea

$$\delta I[y, \delta y, \delta x] = \left(L_* \delta x + \frac{\delta L}{\partial y'} \delta y \right) \Big|_{x_0}^{x_1}$$

și cum $\delta I = 0$ în cazul optimului, dacă $y_0 = g_1(x_0)$ și $y_1 = g_2(x_2)$, avem

$$\delta y_0 = g_1'(x_0)\, \delta x_0, \quad \delta y_1 = g_2'(x_1)\, \delta x_1,$$

ceea ce conduce la relația

$$\left(L_* + g_1' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \Big|_{x_0} \delta x_0 - \left(L_* + g_2' \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \Big|_{x_1} \delta x_1 = 0.$$

Cum δx_0 și δx_1 sînt numere oarecare iar $L_* = L - y' \frac{\partial L}{\partial y'}$, avem

$$L_* + g_1' \frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \text{ pentru } x = x_0, \qquad L_* + g_2' \frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \text{ pentru } x = x_1,$$

ceea ce coincide cu (3.45′).

Trecînd în cazul funcționalelor $I[\mathbf{x}]$, condițiile de transversalitate se vor scrie sub forma

$$\left(L - \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) \Big|_{t_0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \dot{g}_j \Big|_{t_0} = 0 \tag{3.46}$$

dacă pentru $t = t_0$ capătul extremalelor se găsește pe curba $x_j = g_j^1(t)$, $j = 1, \ldots, n$, și

$$\left(L - \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) \Big|_{t_1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \dot{g}_j^2 \Big|_{t_1} = 0, \tag{3.46′}$$

dacă cealaltă extremitate a extremalei este pe curba $x_j = g_j^2(t)$, $j = 1, \ldots, n$; ținînd seama că $x_j = \varphi_j(t; c_1, \ldots, c_{2n})$, cei $2n + 2$ parametri ($c_1, \ldots, c_{2n}$, t_0 și t_1) se deduc din condițiile de transversalitate (3.46), (3.46′) și din condițiile de contact:

$$\varphi_j(t_0; c_1, \ldots, c_{2n}) = g_j^1(t_0), \quad \varphi_h(t_1; c_1, \ldots, c_{2n}) = g_j^2(t_1), \; j = 1, \ldots, n.$$

Evident, (3.46) se poate scrie și sub forma

$$L(t, \boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) + \sum_{j=1}^{n} (\dot{g}_j^1 - \dot{\varphi}_j) \frac{\partial L(t, \boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}})}{\partial \dot{x}_j} = 0 \text{ pentru } t = t_1$$

iar (3.46′) sub forma

$$L(t, \boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}) + \sum_{j=1}^{n} (\dot{g}_j^2 - \dot{\varphi}_j) \frac{\partial L(t, \boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}})}{\partial \dot{x}_j} = 0 \quad \text{pentru } t = t_2.$$

Sînt posibile fie justificări directe ale acestor egalități, utilizînd raționamentul din demonstrația teoremei 9.3, după cum se poate folosi și interpretarea diferențială pentru operatorii δ; de asemenea dacă un capăt al extremalelor se găsește pe o suprafață $F(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$ din $\mathbb{R}^{n+1}$ prin raționamente analoage, se deduc următoarele condiții de transversalitate:

$$\left. \frac{L - \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}}{\frac{\partial F}{\partial t}} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} \right|_{t=t_0} = \ldots = \left. \frac{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}} \right|_{t=t_0}, \tag{3.47}$$

dacă pentru $t = t_0$ avem $F(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0$ [$x_j = \varphi_j(t; c_1, \ldots, c_{2n})$ sînt extremalele funcționalei $I[\mathbf{x}]$]. Egalități asemănătoare se vor obține dacă cealaltă extremitate se va afla pe suprafața $G(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$; evident, pentru determinarea tuturor parametrilor trebuie utilizate și condițiile de contact.

Din punct de vedere geometric, condițiile de transversalitate (3.47) reprezintă o condiție de paralelism între vectorul normal la suprafața $F = 0$ în punctul $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0})$ și vectorul avînd componentele $\left(L_*, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n}\right)$.

Exemplul 39. Să găsim condiția de optim a funcționalei

$$I[y, z] = \int_0^{x_1} (y'^2 + 2yx)\, \mathrm{d}x$$

în ipoteza că mulțimea admisibilă de curbe au o extremitate în origine iar celălalt capăt se află în planul $x = x_1$; deoarece sistemul Euler-Lagrange se scrie

$$y'' - z = 0, \qquad z'' - y = 0,$$

se deduce ecuația diferențială

$$y^{\mathrm{IV}} - y = 0,$$

deci

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

iar

$$z(x) = y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x.$$

Pentru a avea $y(0) = 0$ și $z(0) = 0$, trebuie ca $c_1 + c_2 = 0$, $c_3 = 0$, ceea ce antrenează

$$y(x) = a \operatorname{sh} x + b \sin x,\ z(x) = a \operatorname{sh} x - b \sin x;$$

condițiile de transversalitate (3.47) se scriu aici

$$\frac{-y'^2 - z'^2 + 2yz}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{2y'}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{2z'}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{pentru } x = x_1$$

cu $F(x, y, z) = x - x_1$. Deoarece $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, trebuie să avem $y'(x_1) = 0$, $z'(x_1) = 0$, adică

$$a \operatorname{ch} x_1 + b \cos x_1 = 0, \quad a \operatorname{ch} x_1 - b \cos x_1 = 0;$$

dacă x_1 este astfel incit $\cos x_1 \neq 0$ $\left(\text{deci } x_1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right)$, se deduce $a = b = 0$ și extremalele vor fi $y(x) = 0$, $z(x) = 0$ iar dacă $\cos x_1 = 0$ $\left(\text{deci } x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right)$, rezultă $a = 0$ iar

$$y(x) = b \sin x,\ z(x) = -b \sin x$$

și rămine de verificat ultima condiție $y'^2 + z'^2 - 2yz = \text{const}$, ceea ce este adevărat valoarea constantei fiind $-2b^2$. Așadar, dacă $x_1 = \pi/2 + k\pi$, $k \in Z$, extremalele nu sînt unic determinate.

Fără a intra în amănunte, în cazul integralelor multiple cu domeniu de integrare variabil se obține următoarea expresie pentru variația întîi δI a funcționalei:

$$I[u] = \int_{D_n} L[\mathbf{x}, u, \nabla u)\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

notind $\delta I = (\mathrm{D}I)(u,\ h)$ cu $h = \delta u$:

$$\delta I = \int_{D_n} [L]_u\ \delta u\ \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial D_n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial u_j} \nu_j \right) \delta u\ \mathrm{d}\sigma + \int_{\partial D_n} L \left(\sum_{j=1}^{n} \nu_j\ \delta x_j \right) \mathrm{d}\sigma$$

în notațiile din 3.4, δx_j fiind variații ale variabilelor independente.

3.10. Calculul variațiilor și distanța geodezică

În cap. 2 s-a definit și s-au dedus unele proprietăți ale distanței geodezice, *utilizînd metodele programării dinamice*; la aceleași rezultate se poate ajunge utilizînd metodele calculului variațiilor, în special considerațiile din 3.7.

Astfel, în cazul integralei

$$I[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L[t,\ \mathbf{x}(t),\ \dot{\mathbf{x}}(t)]\ \mathrm{d}t$$

valoarea ei pentru $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ dați, definind o curbă γ de clasă C^1 care unește punctele A și B din $\mathbb{R}^{n+1}$, coordonatele lui A fiind $(t_0,\ \mathbf{x}(t_0))$ iar ale lui B, $(t_1,\ \mathbf{x}(t_1))$, se numește *I-lungimea curbei* γ; dacă în particular γ este o extremală, această I-lungime se numește *distanța geodezică* (sau *eikonalul*) dintre punctele A și B. Această definiție permite construirea unei geometrii în $\mathbb{R}^{n+1}$ în care elementul de arc este definit prin $\mathrm{d}s = L(t,\ \mathbf{x},\ \dot{\mathbf{x}})\mathrm{d}t$ (această geometrie va coincide cu geometria euclidiană dacă $L = \sqrt{1 + |\dot{\mathbf{x}}|^2}$); astfel, de exemplu, o sferă cu centrul $\mathbf{x}_0$ și rază R în această geometrie este suprafața din $\mathbb{R}^{n+1}$ obținută, calculînd pe extemalele care ies din $\mathbf{x}$ distanța geodezică R. Notînd cu J distanța geodezică a funcționalei

$$I[\mathbf{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L[t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)]\ \mathrm{d}t,$$

cu ajutorul egalității (3.29) se pot calcula derivatele parțiale ale lui J; într-adevăr, deoarece J depinde de coordonatele punctelor A și B, vom putea scrie

$$J = J(t_1,\ \mathbf{x}^1,\ t_0,\ \mathbf{x}^0),\ \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(t_0),\quad \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}(t_1),$$

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial t_1} \delta t_1 + \frac{\partial J}{\partial t_0} \delta t_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_j^1} \delta x_j^1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial x_j^0} \delta x_j^0.$$

Deoarece din (3.30) se deduce $L_0 = 0$ pe extremale, din (3.29) se găsește

$$\delta J = L_* \ \delta t_1 - L_*\ \delta t_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j^1} \delta x_j^1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j^0} \delta x_j^0$$

și în baza faptului că variațiile δt_0, δt_1, δx_j^1, δx_j^0 sînt arbitrare, prin identificarea coeficienților acelorași variații se obțin egalitățile

$$\frac{\partial J}{\partial t_1} = L_*[t_1,\ \mathbf{x}(t_1),\ \dot{\mathbf{x}}(t_1)],\quad \frac{\partial J}{\partial x_j^1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j},$$
$$\frac{\partial J}{\partial t_0} = L_*[t_0,\ \mathbf{x}(t_0),\ \dot{\mathbf{x}}(t_0)],\quad \frac{\partial J}{\partial x_j^0} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j^0},\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3.48}$$

Presupunînd problema variațională regulată, adică $\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_k}\right] \neq 0$, se pot utiliza variabilele hamiltoniene $\mathbf{x}$ și $\mathbf{p}$ în locul variabilelor lagrangiene $\mathbf{x}$ și $\dot{\mathbf{x}}$, punînd

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j},\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

ceea ce conduce la egalitatea $L_* = -H$, H fiind hamiltonianul corespunzător lagrangianului L) iar (3.48) se transcriu (cu t în loc de t_1)

$$\frac{\partial J}{\partial t} + H(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p}) = 0,\qquad \frac{\partial J}{\partial x_j} = p_j,$$
$$\frac{\partial J}{\partial t_0} - H(t_0,\ \mathbf{x}^0,\ \mathbf{p}^0) = 0,\quad \frac{\partial J}{\partial x_j^0} = -p_j^0,\quad j = 1,\ \ldots,\ n,$$

ceea ce înseamnă că funcția J, considerată ca funcție de coordonatele punctului B va verifica ecuația lui Jacobi

$$\frac{\partial J}{\partial t} + H\left(t,\ \mathbf{x},\ \frac{\partial J}{\partial x_j}\right) = 0.$$

Tot o ecuaţie cu derivate parţiale Jacobi va verifica distanţa geodezică presupusă funcţie de coordonatele punctului A.

3.11. Metode directe în calculul variaţional

3.11.1. Principii generale

Ideea de bază a metodelor directe în probleme de calcul variaţional constă în transformarea, într-un mod sau altul, a acesteia într-o problemă de extrem pentru funcţii de m variabile care să poată fi rezolvată prin metodele analizei clasice iar apoi se trece la limită cînd $m \to \infty$. Astfel, în cazul unei probleme de optim $I[u] \to \to \min$, în care funcţionala I are una din formele considerate anterior, fiind definită pe o mulţime admisibilă M de funcţii, se face ipoteza că dacă $u \in M$, atunci mulţimea de numere reale $\{I[u]\}$ este mărginită inferior, deci admite o margine inferioară strictă $\underline{I}$ (nu se presupune existenţa unui element $\underline{u} \in M$ astfel încît $I[\underline{u}] = \underline{I}$); prin urmare, avem

$$I[u] \geqslant \underline{I}, \quad u \in M,$$

şi în baza definiţiei marginii inferioare stricte există în M un şir $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ avînd proprietatea

$$\lim_{m \to \infty} I[u_m] = \underline{I}.$$

Orice şir $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ din M, avînd această proprietate, se va numi *şir minimizant* al problemei variaţionale în studiu; diversele metode directe utilizate în practică diferă între ele prin modul de construcţie a şirului minimizant.

3.11.2. Metoda diferenţelor finite a lui Euler*)

În cazul funcţionalei simple

$$I[y] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]\,\mathrm{d}x, \quad y(a) = y_a, y(b) = y_b,$$

*) Sau a liniilor poligonale.

vom nota $a = x_0$, $b = x_{n+1}$ şi vom considera o partiţie echidistantă a intervalului $[x_0, x_{n+1}]$ în $n+1$ subintervale de lungime egală cu $h = \dfrac{b-a}{n+1}$, punîndu-se în evidenţă numerele

$$a = x_0, \ x_1 = x_0 + h, \ x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \ \ldots, x_n = x_0 + nh, \ x_{n+1} = b,$$

cărora le punem în corespondenţă numerele $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1} = y_b$ dintre care $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt necunoscute; în plan, punctele avînd coordonatele (a, y_a), (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), (b, y_b) determină o linie poligonală şi vom determina convenabil $y_1, y_2, \ldots, y_n$ astfel încît această linie poligonală să aproximeze extremala căutată a funcţionalei în studiu. Înlocuind integrala printr-o sumă integrală, punînd de exemplu

$$\int_a^b F[x, y(x), y'(x)]\,\mathrm{d}x \approx \sum_{j=0}^{n} F\left(x_j, y_j, \frac{y_{j+1} - y_j}{h}\right) h,$$

vom putea considera suma ca o funcţie de variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_n$; vom nota

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{j=0}^{n} F\left(x_j, y_j, \frac{y_{j+1} - y_j}{h}\right) h$$

şi vom determina $y_1, y_2, \ldots, y_n$ astfel încît f să aibă o valoare staţionară. Aşadar, din sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

vom presupune că se determină numerele $y_1, y_2, \ldots, y_n$; or, notînd $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, este uşor de văzut că egalitatea $\dfrac{\partial f}{\partial y_k} = 0$ se poate scrie sub forma

$$\frac{\partial F\left(x_k, y_k, \dfrac{\Delta y_k}{h}\right)}{y_k} -$$

$$- \frac{1}{h}\left[\frac{\partial F\left(x_k, y_k, \dfrac{\Delta y_k}{h}\right)}{\partial y_k} - \frac{\partial F\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \dfrac{\Delta y_{k-1}}{h}\right)}{\partial y_{k-1}}\right] = 0, \tag{3.49}$$

deoarece y_k intervine de două ori în suma care o definește pe f.

Se observă direct că prin trecere la limită în (3.49) pentru $h \to 0$ se obține ecuația Euler.

Exemplul 30. Să găsim cu ajutorul metodei liniilor poligonale a lui Euler minimul funcționalei

$$I[y] = \int_0^1 (y'^2 - 2y)\, dx,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0.$$

Luînd $h = \dfrac{1-0}{5} = 0{,}2$, vom avea

$$y_0 = y(0) = 0,\ y_1 = y(0{,}2),\ y_2 = y(0{,}4),\ y_3 = y(0{,}6),\ y_4 = y(0{,}8),\ y_5 = y(1) = 0,$$

$$y'(0) = \frac{y_1 - y_0}{0{,}2} = \frac{1}{0{,}2} y_1,\quad y'(0{,}2) = \frac{y_2 - y_1}{0{,}2},\qquad y'(0{,}4) = \frac{y_3 - y_2}{0{,}2},$$

$$y'(0{,}6) = \frac{y_4 - y_3}{0{,}2},\qquad y'(0{,}8) = \frac{0 - y_4}{0{,}2}$$

și deci

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0{,}2 \cdot \left[\left(\frac{y_1}{0{,}2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{0{,}2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_2}{0{,}2}\right)^2 + \left(\frac{y_4 - y_3}{0{,}2}\right)^2 + \left(\frac{y_4}{0{,}2}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \right];$$

calculînd derivatele parțiale în raport cu y_1, y_2, y_3, y_4, se obține sistemul algebric

$$\begin{aligned} 2y_1 - y_2 &= 0{,}04, & -y_2 + 2y_3 - y_4 &= 0{,}04, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 &= 0{,}04, & -y_3 + 2y_4 &= 0{,}04, \end{aligned}$$

ale cărui soluții vor fi $y_1 = 0{,}08$, $y_2 = 0{,}12$, $y_3 = 0{,}12$, $y_4 = 0{,}08$.

Comparînd aceste valori cu valorile exacte ale extremalei în aceste puncte, deoarece ecuația Euler se scrie $y'' = -1$, avem, ținînd seama de condițiile la limită,

$$y(x) = \frac{1}{2}(x - x^2),$$

$$y(0{,}2) = 0{,}08,\ y(0{,}4) = 0{,}12,\ y(0{,}6) = 0{,}12,\ y(0{,}8) = 0{,}08,$$

adică valorile aproximative coincid cu valorile exacte.

3.11.3. **Metoda lui Ritz**

Metoda lui Ritz constă în utilizarea unui sistem complet de funcții din mulțimea de definiție M a funcționalei, cu ajutorul căruia problema de minim pentru funcționala $I[u]$ se transformă

într-o problemă de minim pentru funcții de mai multe variabile reale; dacă $\{\varphi_j\} \subset M$ este sistemul de funcții considerat, se presupune că orice combinație liniară a acestor funcții este de asemenea un element din M, ceea ce implică anumite ipoteze de regularitate și verificarea unor condiții la limită. Funcțiile $\{\varphi_j\}$, care evident se pot presupune liniar independente, se numesc *funcții coordonate*. Dacă

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j$$

este o combinație liniară a primelor funcții coordonate, prin ipoteză avem $u_m \in M$ iar $I[u_m]$ va deveni o funcție de parametrii $c_1, c_2, \ldots, c_m$ uneori este posibil să se aleagă acești parametri astfel încît funcția

$$f(c_1, c_2, \ldots, c_m) = I[u_m]$$

să admită un minim pentru $c_j = c_j^0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, deci

$$\frac{\partial f(c_1^0, \ldots, c_m^0)}{\partial c_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

iar în același timp șirul $(u_m^0)_{m \in \mathbb{N}}$ să fie un șir minimizant, cu

$$u_m^0 = \sum_{j=1}^{m} c_j^0 \varphi_j.$$

De exemplu, dacă este vorba de funcționala

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)]\, dx,\ \ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,$$

ipotezele anterioare sînt verificate dacă funcția $F(x, y, z)$ este continuă în raport cu cele trei argumente ale sale pentru orice z și $(x, y) \in D_2$, $\overline{D}_2$ fiind un compact în care sînt cuprinse graficele funcțiilor

$$y_m(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x),$$

și dacă în plus

$$F(x, y, z) \geqslant \alpha |z|^p + \beta,\ \ \alpha > 0,\ p > 1,\ \beta \in \mathbb{R},\ (x, y) \in D_2,$$

iar $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ este continuă și nedescrescătoare în raport cu $z \in \mathbb{R}$ pentru orice $(x, y) \in D_2$.

În particular, aceste condiții sînt satisfăcute pentru funcționala

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} [p(x)\, y'^2 + q(x)\, y^2 + 2r(x)y]\, \mathrm{d}x, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

cu $p,\ p',\ q,\ r \in C([x_0, x_1])$, $p(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, caz de o deosebită importanță practică. Într-adevăr, aici

$$F(x, y, z) = p(x)z^2 + q(x)y^2 + 2r(x)\, y \geqslant \underline{p}\, |z|^2 + \beta,$$

unde $0 < \underline{p} \leqslant p(x) \leqslant \bar{p}$, $\beta = \min\limits_{D_2}[q(x)y^2 + 2r(x)y]$, $D_2 = [x_0, x_1] \times \times [a, b]$ cu a și b convenabil determinați.

În 3.11.6 vom determina și alte condiții suficiente pentru ca șirul $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ să fie un șir minimizant.

Exemple. 31. Să considerăm funcționala

$$I[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy)\, \mathrm{d}x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0\,;$$

se poate alege sistemul de funcții coordonate de forma

$$\varphi_j(x) = (1 - x)x^j, \qquad j \in \mathbb{N},$$

pentru care, evident, $\varphi_j(0) = \varphi_j(1) = 0$ și care este liniar independent și complet în $C([0, 1])$. Presupunînd $j = 1$, avem

$$y_1(x) = c(1 - x)x$$

și prin înlocuire se deduce

$$f(c) = I[c(1 - x)x] = \frac{11}{30}c^2 + \frac{1}{6}c\,;$$

deoarece $f'(x) = 0$ pentru $c_0 = -\dfrac{5}{22}$, rezultă soluția aproximativă

$$y_1(x) = -\frac{5}{22}x(1 - x).$$

Dacă se presupune

$$y_2(x) = c_1 x(1 - x) + c_2 x^2(1 - x),$$

se deduce

$$f(c_1, c_2) = I\,[c_1 x(1 - x) + c_2 x^2(1 - x)] = \frac{11}{30}c_1^2 + \frac{1}{7}c^2 - \frac{19}{30}c_1 c_2 + \frac{1}{6}c_1 - \frac{3}{20}c_2\,;$$

sistemul $\dfrac{\partial f}{\partial c_1} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial c_2} = 0$ admite soluțiile $c_1^0 = -0{,}2271$, $c_2^2 = 0{,}001$ iar o altă soluție aproximativă va fi

$$y_2(x) = x(1 - x)(-0{,}2271 - 0{,}0001\, x).$$

Acest procedeu poate continua.

32. În cazul funcționalei

$$I[u] = \iint_{D_2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2ku\right]\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \quad u\Big|_{\partial D_2} = 0,$$

unde $k \in \mathbb{R}$ iar D_2 este dreptunghiul $]-a, a[\times]-b, b[$, $a > 0$, $b > 0$, pentru utilizarea metodei Ritz se pot folosi funcțiile coordonate

$$\varphi_j(x, y) = (x^2 - a^2)^j (y^2 - b^2)^j, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \varphi_j|_{\partial D_2} = 0\,;$$

luînd în considerație doar prima aproximație, adică presupunînd

$$u_1(x, y) = c_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2),$$

se obține

$$f(c_1) = I\,[u_1] = \frac{128}{45}a^3 b^3(a^2 + b^2)c_1^2 + \frac{32}{9}k\, c_1 a^3 b^3$$

iar condiția de extrem $f'(c_1) = 0$ determină pe

$$c_1^0 = -\frac{5k}{8(a^2 + b^2)}.$$

Se obține deci soluția aproximativă

$$u(x, y) \approx u_1(x, y) = -\frac{5k}{8(a^2 + b^2)}(x^2 - a^2)(y^2 - b^2), \quad (x, y) \in D_2.$$

Din aceste exemple rezultă că metoda Ritz poate fi utilizată și pentru rezolvarea aproximativă a ecuațiilor diferențiale sau a ecuațiilor cu derivate parțiale; astfel, în cazul exemplului 31, y_1 și y_2 pot fi considerate soluții aproximative care verifică $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, ale ecuației diferențiale $y'' - y = x$, deoarece această ecuație este ecuația lui Euler pentru lagrangianul

$$L(x, y, y') = y'^2 + y^2 + 2xy.$$

În exemplul 32 se poate interpreta u_1 ca soluție aproximativă a ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k$$

care este nulă pe frontiera dreptunghiului $]-a, a[\times]-b, b[$, deoarece această ecuație este ecuația Euler-Ostrogradski pentru lagrangianul

$$L(u, \nabla u) = 2ku + |\nabla u|^2.$$

Situația descrisă prin exemplul 31 se poate generaliza în modul următor: soluții aproximative ale ecuației diferențiale de ordinul al doilea

$$y'' = f(x, y, y'),$$

care verifică condițiile bilocale $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, se pot obține aplicînd metoda lui Ritz funcționalei

$$I[y] = \int_a^b L[x, y(x), y'(x)]\,\mathrm{d}x$$

în care

$$L(x, y, y') = \alpha(x, y) + y'\beta(x, y) + \int_{\alpha_0}^{y'} (y' - t)\, u(x, y, t)\,\mathrm{d}t,$$

α și β fiind funcții arbitrare în x și y, de o clasă convenabilă, care verifică condiția $\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} = \dfrac{\partial\beta}{\partial x}$, iar $u = u(x, y, y')$ este o soluție a ecuației cu derivate parțiale liniară și de ordinul întîi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y'\frac{\partial u}{\partial y} + f\frac{\partial u}{\partial y'} = u\frac{\partial f}{\partial y'} \tag{3.50}$$

[deoarece ecuația lui Euler a funcționalei fiind

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y}y' + \frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

pentru a coincide cu ecuația diferențială

$$y'' = f(x, y, y'),$$

va trebui să avem

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}f + \frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y}y' + \frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0;$$

derivînd în raport cu y' și notînd $u = \dfrac{\partial^2 L}{\partial y'^2}$, se găsește ecuația cu derivate parțiale (3.50)].

3.11.4. Metoda lui Kantorovici

Metoda lui Kantorovici este o metodă directă aplicabilă numai funcționalelor de forma

$$I[u] = \int_{D_n} L(x, u, \nabla u)\,\mathrm{d}x,\quad n \geqslant 2,\quad u\Big|_{\partial D_n} = f$$

și se prezintă ca o variantă a metodei lui Ritz, soluția aproximativă căutîndu-se sub forma

$$u_m(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} c_j(x_k)\,\varphi_j(\mathbf{x}),$$

unde $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ este șirul de funcții coordonate luat în considerație iar $c_1, \ldots, c_m$ sînt funcții de o singură variabilă și care se aleg astfel încît funcționala

$$f[c_1, c_2, \ldots, c_m] = I[u_m] = \int_{D_n} L(\mathbf{x}, u_m, \nabla u_m)\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

să aibă o valoare staționară.

Exemplul 33. Să utilizăm metoda lui Kantorovici în cazul exemplului 32; se poate presupune

$$u(x), y) = c(x)\,(y^2 - b^2)$$

cînd $u=0$ dacă $y=-b$ sau $y=+b$ şi pentru a fi verificate şi condiţiile $u(\pm a, y)=0$, funcţia c trebuie să verifice $c(\pm a)=0$; calculînd $I[u]$, se găseşte

$$I[u]=I^*[c]=\iint_{D_2}[c'^2(x)(y^2-b^2)^2+4y^2c^2(x)+2kc(x)(y^2-b^2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Integrînd în raport cu y, găsim

$$I^*[c]=\int_{-a}^{+a}\left[\frac{16\,b^5}{15}c'^2(x)+\frac{8b^3}{3}c^2(x)-\frac{8b^3}{3}k\,c(x)\right]\mathrm{d}x,$$

ceea ce înseamnă că funcţia c va fi soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{16}{15}c''-\frac{8}{3b^2}c=\frac{4}{3b^2}k$$

care verifică $c(-a)=0$, $c(+a)=0$; se deduce

$$c(x)=-\frac{1}{2}k+A\exp\left(\frac{x}{b}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)+B\exp\left(-\frac{x}{b}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$$

şi pentru a avea îndeplinite condiţiile bilocale, găsim

$$c(x)=\frac{1}{2}k\left[\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{x}{b}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}-1\right],$$

iar soluţia aproximativă va fi

$$u(x,y)\approx\frac{1}{2}k(y^2-b^2)\left[\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{x}{b}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}-1\right].$$

Pentru o aproxmaţie mai bună, se caută soluţii de forma

$$u(x,y)=c_1(x)(y^2-b^2)+c_2(x)(y^2-b)^2,$$

ceea ce implică rezolvarea unei problema bilocale pentru un sistem diferenţial de ordinul al doilea.

3.11.5. Metoda celor mai mici pătrate

Metoda celor mai mici pătrate poate fi utilizată în integrarea aproximativă a unor ecuaţii diferenţiale sau cu derivate parţiale prin utilizarea metodelor calculului variaţional; vom exem-

plifica această metodă pe cazul problemei Cauchy $y(x_0)=y_0$ pentru ecuaţia diferenţială de ordinul întîi

$$y'=f(x,y),\tag{3.51}$$

unde $f:[x_0,x_1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1. Integrarea ecuaţiei date în condiţia iniţială considerată este echivalentă cu problema variaţională

$$I[y]=\int_{x_0}^{x_1}[y'-f(x,y)]^2\,\mathrm{d}x\to\min,\tag{3.51'}$$

mulţimea admisibilă M fiind aici formată din funcţiile de clasă C^2, dacă $x\in[x_1,x_2]$, care verifică condiţia Cauchy dată pentru $x=x_0$. Fiind vorba de o probemă variaţională, în baza teoriei generale pentru $x=x_1$, va trebui verificată condiţia la limită naturală $\left.\frac{\partial L}{\partial y'}\right|_{x=x_1}=0$, adică, deoarece

$$L(x,y,y')=[y'-f(x,y)]^2,\tag{3.51''}$$

va trebui să avem $y'(x_1)=f[x_1,y(x_1)]$, ceea ce evident nu este o restricţie, reprezentînd condiţia ca funcţia $y=y(x)$ să verifice ecuaţia diferenţială în punctul x_1. Faptul că problema Cauchy $y(x_0)=y_0$ pentru ecuaţia diferenţială (3.51) conduce la o problemă variaţională (3.51') se justifică imediat, ţinînd seama că $L\geqslant 0$, cu L definit prin (3.51''), deci $I[y]\geqslant 0$ iar valoarea minimă a funcţionalei este zero şi este atinsă pentru soluţiile ecuaţiei (3.51).

Aplicînd metoda Ritz funcţionalei în cauză, se vor obţine soluţii aproximative pentru problema Cauchy $y(x_0)=y_0$ pentru ecuaţia (3.51). De remarcat că ecuaţia lui Euler pentru funcţionala (3.51') este (dacă $f\in C^1$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y'-f(x,y)]+[y'-f(x,y)]\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0,$$

adică

$$y''=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'$$

şi nu este altceva decît rezultatul derivării ecuaţiei (3.51) în raport cu x; metoda Ritz însă nu face apel la ecuaţia lui Euler, aşa că în funcţionala (3.51′) se poate presupune $f \in C^0$.

3.11.6. Metoda Ritz şi operatorii liniari

Dacă se consideră ecuaţiile de forma

$$Au = f \tag{3.52}$$

în care $A : M \to N$ este un operator liniar iar f este un element fix din N, în anumite ipoteze impuse lui A se poate justifica în întregime metoda lui Ritz (ceea ce înseamnă că se pot construi şiruri minimizante care vor converge către soluţia ecuaţiei).

Vom presupune M un spaţiu Hilbert real iar $N = M$; în plus, vom presupune verificate egalitatea $\mathrm{A} = \mathrm{A}^+$, unde A^+ este definit prin

$$(\mathrm{A}u, v) = (u, \mathrm{A}^+ v) \qquad \forall (u, v) \in M \times M, \tag{3.52′}$$

ceea ce face ca operatorul liniar A să fie autoadjunct *) şi inegalitatea

$$(\mathrm{A}u, u) \geqslant a\|u\|^2, \quad a > 0, \quad \forall u \in M, \tag{3.52″}$$

care arată că A este operator pozitiv definit; dacă notăm $\mathrm{A}(M)$ mulţimea valorilor operatorului A, inegalitatea (3.52″) arată că există operatorul invers $\mathrm{A}^{-1} : \mathrm{A}(M) \to M$ care este mărginit

$$\|\mathrm{A}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{a} \tag{3.52‴}$$

[într-adevăr, A este surjectiv pe $\mathrm{A}(M)$ iar deoarece ipoteza $\mathrm{A}u = 0$, antrenează din (3.52‴) $\|u\|^2 \leqslant 0$, adică $u = 0$, rezultă injectivitatea lui A; (3.52‴) se deduce din (3.52″) utilizînd inegalitatea lui Schwartz, deci $(\mathrm{A}u, u) \leqslant \|\mathrm{A}u\| \, \|u\|$, ceea ce înseamnă $\|\mathrm{A}u\| \geqslant a\|u\|$ şi notînd $\mathrm{A}u = v$, deci $u = \mathrm{A}^{-1} v$, rezultă $\|\mathrm{A}^{-1} v\| \leqslant \frac{1}{a}\|v\|$ pentru orice $v \in \mathrm{A}(M)$].

Funcţionala care se ataşează ecuaţiei (3.52) este

$$I[u] = (\mathrm{A}u, u) - 2(u, f) \tag{3.53}$$

*) Vezi cap. 4.

şi este uşor de constatat că dacă A este un operator autoadjunct şi pozitiv definit, pentru ca pentru un $f \in M$ să existe soluţia $u_0 \in M$ astfel încît $\mathrm{A}u_0 = f$, este necesar şi suficient ca funcţionala I să admită un minim în u_0; într-adevăr, pentru un u_0 şi v arbitrar din M avem, cu $t \in \mathbb{R}$:

$$I(u_0 + tv) = (\mathrm{A}(u_0 + tv), u_0 + tv) - 2(u_0 + tv, f) =$$

$$= \mathrm{A}(u_0, u_0) + t(\mathrm{A}v, u_0) + t(\mathrm{A}\,u_0, v) + t^2(\mathrm{A}v, v) - 2(u_0, f) - 2t(f, v),$$

deoarece $(\mathrm{A}v, u_0) = (\mathrm{A}u_0, v)$, se deduce

$$I[u_0 + tv] = I[u_0] + 2t(\mathrm{A}\,u_0 - f, v) + t^2(\mathrm{A}\,v, v), \tag{3.53′}$$

ceea ce înseamnă că dacă $\mathrm{A}u_0 = f$, pentru $t = 1$ avem

$$I[u_0 + v] = I[u_0] + (\mathrm{A}v, v) \geqslant I[u_0] \tag{3.53″}$$

în baza lui (3.52″) şi cum orice element din M se poate scrie sub forma $u_0 + v$, avem $I[u] \geqslant I[u_0]$ şi funcţionala I are pe $I[u_0]$ ca valoare minimă. Reciproc, dacă u_0 este elementul din M pentru care se atinge valoarea minimă a funcţionalei I, deci dacă

$$I[u_0 + tv] \geqslant I[u_0]$$

pentru $t \in \mathbb{R}$ şi $v \in M$, din (3.53′) se deduce egalitatea

$$I[u_0 + v] - I[u_0] = (\mathrm{A}u_0 - f, 2v) + (\mathrm{A}v, v)$$

care, deoarece $\lim\limits_{\|v\| \to 0} \frac{|(v, \mathrm{A}v)|}{\|v\|} = 0$, arată că funcţionala I este diferenţiabilă avînd derivata $\mathrm{A}u_0 - f$ care va trebui să se anuleze, u_0 fiind un punct de minim (vezi 3.2).

Teorema 3.10. *Dacă* A *este un operator autoadjunct, pozitiv definit, atunci orice şir minimizant* $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ *converge către soluţia ecuaţiei* (3.52).

⌈ Reamintim că un şir $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ din M este minimizant pentru funcţionala I dacă $\lim\limits_{m \to \infty} I[u_m] = \min\limits_{u \in M} I[u]$; dacă u_0 verifică ecuaţia

(3.52), avem $I[u_0]=\min_{u\in M} I[u]$ iar din (3.53″) se deduce, punînd $v=u_m-u_0$,

$$I[u_m]=I[u_0]+(\mathrm{A}(u_m-u_0),\ u_m-u_0)$$

şi cum $I[u_0]=\min I[u]$, neapărat

$$(\mathrm{A}(u_m-u_0), u_m-u_0)\to 0 \text{ cînd } m\to\infty.$$

În baza inegalităţii (3.52″), se obţine

$$\|u_m-u_0\|\leqslant \frac{1}{a}(\mathrm{A}(u_m-u_0), u_m-u_0)\to 0,$$

adică $u_m\to u_0$. ┘

Construcţia efectivă a elementului u_m din şirul minimizant $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ se poate realiza astfel: presupunînd spaţiul Hilbert M avînd dimensiune infinită şi separabil, va exista un şir $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ din M complet (sau închis, adică din condiţiile de ortogonalitate $(\varphi_j, u)=0$, $j\in\mathbb{N}$ să rezulte $u=0$) şi fie $M_m\subset M$ astfel încît M_m să fie spaţiul vectorial generat de $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\}$. Vom defini $u_m\in M_m$ astfel încît pentru u_m funcţionala I să admită valoarea minimă

$$I[u_m]=\min_{u\in M_m} I[u];$$

deoarece $v=\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j$ dacă $v\in M_m$, rezultă

$$I[v]=f(c_1,\ldots,c_m), \tag{3.54}$$

ceea ce înseamnă că u_m se obţine din v dacă $c_1,\ldots,c_m$ sînt soluţiile sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial c_j}=0,\quad j=1,\ldots,m. \tag{3.54'}$$

Pentru ca aceste consideraţii să fie corecte mai este necesar să se arate că în subspaţiul M_m funcţionala I îşi atinge efectiv minimul; or, deoarece

$$I[u]=(\mathrm{A}u,\ u)-2(u,\ f),$$

avem $I[0]=0$ iar din (3.52″) se deduce (utilizînd şi inegalitatea lui Schwartz)

$$I[u]\geqslant a\,\|u\|^2-2\,\|u\|\,\|f\|=(a\|u\|-2\|f\|)\,\|u\|,$$

ceea ce înseamnă că $I[u]>0$ dacă $\|u\|>\frac{2}{a}\|f\|$. Aşadar, valoarea minimă în M_m a funcţionalei I se va afla (dacă există) în sfera cu centrul în origine şi avînd raza mai mică decît $\frac{2}{a}\|f\|$ (în afara ei I nu ia decît valori pozitive iar valoarea minimă este $\leqslant 0$); cum M_m are dimensiunea finită, sfera va fi o mulţime compactă şi, conform cu teorema lui Weierstrass, I îşi va atinge efectiv valoarea minimă în această sferă (din continuitatea operatorului A şi continuitatea produsului scalar se deduce şi continuitatea funcţionalei I). Din consideraţiile anterioare s-a dedus diferenţiabilitatea funcţionalei I aşa că egalităţile (3.54′) pot fi efectiv scrise, rămînînd însă de justificat compatibilitatea acestui sistem. Or, din proprietăţile de liniaritate ale lui A şi ale produsului scalar se deduce

$$I[v]=I\left[\sum_{j=1}^{m} c_j\,\varphi_j\right]=\sum_{j,k=1}^{m} c_j\,c_k(\mathrm{A}\varphi_j,\varphi_k)-2\sum_{j=1}^{m} c_j(\varphi_j,f),$$

ceea ce înseamnă că f, definit prin (3.54), este un polinom de gradul al doilea şi, prin urmare,

$$\frac{\partial f}{\partial c_j}=2\sum_{k=1}^{m} c_k(\mathrm{A}\varphi_j,\ \varphi_k)-2(\varphi_j,f)\quad j,=1,\ldots,m,$$

ceea ce face ca sistemul (3.54′) se transcrie sub forma următorului sistem liniar:

$$\sum_{k=1}^{m} c_k(\mathrm{A}\varphi_j,\ \varphi_k)=(\varphi_j,f),\quad j=1,\ldots,m,$$

al cărui determinant este sigur nenul (sistemul $\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots\}$ fiind complet va fi şi liniar independent sau poate fi considerat chiar ortogonal, prin aplicarea procedeului de ortogonalizare), ceea ce antrenează posibilitatea determinării efective a constantelor $c_1,\ldots,c_m$ care sînt unic determinate.

Teorema 3.11. *Dacă* A *este un operator liniar, autoadjunct și pozitiv definit, atunci șirul* $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *obținut prin metoda Ritz converge către soluția ecuației* $Au = f$.

⌈ În baza teoremei 3.10 este suficient să se arate că șirul $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ este un șir minimizant; dar, dacă $u_0 \in M$ este soluția ecuației $Au = f$, știm că $I[u_0] = \min_{u\in M} I[u]$ iar deoarece $M_m \subset M$, avem

$$\min_{u\in M_m} I[u] \leqslant \min_{u\in M} I[u],$$

adică

$$I[u_0] \leqslant \min_{u\in M_m} I[u] = I[u_m]. \tag{3.55}$$

Presupunînd șirul $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ortonormat, acesta va constitui o bază în M iar $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ vor defini o bază în M_m, ceea ce face să putem scrie

$$u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, \varphi_j,$$

$(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ fiind șirul coeficienților Fourier pentru u_0. Notînd

$$v_m = \sum_{j=1}^{m} a_j\, \varphi_j,$$

se deduce $v_m \in M_m$ iar $v_m \to u_0$ cînd $m \to \infty$. În plus, $I[u_m] \leqslant I[v_m]$, deoarece $I[u_m]$ este valoarea minimă pentru I în subspațiul M_m. Utilizînd ultima inegalitate din (3.55), se deduce dubla inegalitate

$$I[u_0] \leqslant I[u_m] \leqslant I[v_m]$$

și trecînd la limită, pentru $m \to \infty$, se deduce $\lim I[v_m] = I[\lim v_m]$ (în baza continuității funcționalei I), ceea ce înseamnă

$$I[u_0] \leqslant \lim I[u_m] \leqslant I[\lim v_m] = I[u_0],$$

adică $I[u_m] \to I[u_0]$. ⌋

Exerciții

1°. Să se găsească extremalele funcționalei

$$I[u] = \iint_{D_2} \sqrt{u_x + u_y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y},$$

integrînd pînă la capăt ecuația Euler-Ostrogradski corespunzătoare cu ajutorul substituției $\xi = x - y$, $\eta = y$.

R. $u(x, y) = f(x-y) + yg(x-y)$, f și g fiind funcții oarecare de clasă $C^2(D_2)$.

2°. Să se arate că extremalele funcționalei

$$I[u] = \iint_{D_2} u_x\, u_y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

sînt $u(x, y) = f(x) + g(y)$, f și g fiind funcții oarecare de clasă C^2 în D_2.

3°. Să se arate că extremaele funcționalei

$$I[u] = \iint_{D_2} (u_x^2 - 2u_x\, u_y + u_y^2 + 2u_x + 2u_y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

se pot scrie $u(x, y) = f(x-y) + y\, g(x-y)$.

R. Vezi indicația de la exercițiul 1.

4°. Să se arate că extremalele funcționalei

$$I[u] = \iint_{D_2} (x^2 u_x^2 - x^2 u_y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

sînt $u(x, y) = x^{-1} f(x+y) + x^{-1} g(x-y)$, în orice domeniu din $\mathbb{R}^2$ care nu se intersectează cu $x = 0$.

R. În ecuația Euler-Ostrogradski corespunzătoare se face schimbarea de funcție $u \to x^{-1} u(x, y)$ iar în ecuația obținută se utilizează noile variabile independente $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

5°. Să se arate că dacă lagrangianul L depinde de derivatele de ordin superior ale lui $u = u(x, y)$, adică dacă

$$I[u] = \iint_{D_2} L(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots, u_{\underbrace{y\ldots y}_{n \text{ ori}}})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

atunci ecuația cu derivate parțiale a extremalelor (în ipoteza că u și L sînt suficient de regulate) se scrie

$$L_u - \frac{\partial}{\partial x}(L_{u_x}) - \frac{\partial}{\partial y}(L_{u_y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(L_{u_{xx}}) + 2\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}(L_{u_{xy}}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(L_{u_{yy}}) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial y^n}(L_{u_{\underbrace{y\ldots y}_{n \text{ ori}}}}) = 0.$$

6°. Să se arate că ecuația extremalelor pentru funcționala

$$I[u] = \iint_{D_2} [u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2u_{xy}^2 - 2f(x, y)\, u]\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

se scrie

$$\Delta_2^2 u = \Delta_2 (\Delta_2 u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y).$$

R. Se folosește exercițiul 5.

7°. *Teorema lui Clairaut* : în $\mathbb{R}^3$ la orice suprafață de rotație scrisă în coordonate cilindrice $z = f(r)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ are loc egalitatea $r\sin\theta_1 = \text{const}$, unde θ_1 este unghiul format între o geodezică pe această suprafață și o curbă meridiană a suprafeței.

R. Deoarece $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + (1 + f_r'^2)r'^2}\, \mathrm{d}\theta$, ecuația Euler a geodezicelor se va scrie $r^2 = C\sqrt{r^2 + (1 + f_r'^2)\, r'^2}$, adică $r^2 \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = C$ și deoarece $\sin\theta_1 = r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$, se obține egalitatea cerută.

CAPITOLUL 4

Funcții și valori proprii pentru operatori diferențiali

4.1. Generalități

4.1.1. Spații Sobolev. Derivate slabe

Dacă D_n este un domeniu din $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, vom nota prin $C^\infty(D_n)$ mulțimea funcțiilor $f : D_n \to \mathbb{R}$ indefinit derivabilele pe D_n și prin $C_0^\infty(D_n)$ mulțimea funcțiilor indefinit derivabile, avînd suportul compact inclus în D_n, înțelegînd prin suportul unei funcții $f : D_n \to \mathbb{R}$ închiderea mulțimii $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in D_n, f(\mathbf{x}) \neq 0\}$; prin urmare, notînd prin $\operatorname{supp} f$ suportul funcției f, avem

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in D,\ f(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Deci $f \in C_0^\infty(D_n)$ dacă $f \in C^\infty(D_n)$, iar $\operatorname{supp} f \subset D_n$; dacă $f \in C_0^\infty(D_n)$, vom spune că f este o *funcție-test*.

Dacă existența unor elemente în mulțimea $C^\infty(D_n)$ este ușor de stabilit [de exemplu orice polinom în variabilele $x_1, \ldots, x_n$ este o funcție din $C^\infty(D_n)$, oricare ar fi D_n] nu același lucru este valabil pentru mulțimea $C_0^\infty(D_n)$; în orice caz, dacă $f \in C_0^\infty(D_n)$, f nu poate fi dezvoltată în serie Taylor în D_n, deoarece dacă $f(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in D_n \setminus \operatorname{supp} f$, se deduce $f(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in D_n$ (în baza faptului că orice funcție dezvoltabilă în serie Taylor în orice punct din D_n nu se poate anula pe o mulțime cu punct de acumulare în D_n dacă nu este nulă peste tot în D_n), iar în cele ce vor urma, vom arăta că mulțimea $C_0^\infty(D_n)$ conține un număr suficient de elemente.

Fie $n = 1$ și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definit prin

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right), & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x \leqslant 0; \end{cases} \tag{4.1}$$

dacă $x > 0$ sau $x < 0$, evident f este indefinit derivabilă și rămine de văzut ce se intîmplă pentru $x = 0$; dacă $x < 0$, avem $f^{(k)}(x) = 0$ și deci $\lim\limits_{x \uparrow 0} f^{(k)}(x) = 0$ iar deoarece se poate verifica ușor prin inducție că

$$f^{(k)}(x) = P_{2k}\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right), \quad x > 0, \tag{4.1'}$$

rezultă

$$\lim_{x \downarrow 0} f^{(k)}(x) = \lim_{x \downarrow 0} P_{2k}\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \uparrow \infty} P_{2k}(t) \exp(-t) = 0.$$

Prin urmare $f^{(k)}(0+) = f^{(k)}(0-) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, și presupunind $f^{(k)}(0) = 0$, va rezulta [ținind seama de (4.1'), fie de faptul că $f^{(k)}(x) = 0$ pentru $x < 0$]

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} [f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)] = f^{(k+1)}(0) = 0,$$

ceea ce inseamnă că f definit prin (4.1) este o funcție indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, avind derivatele de orice ordin nule in origine (această funcție nu este insă dezvoltabilă in serie Taylor pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$, deoarece dacă se presupune valabilă egalitatea

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f \qquad) \; x^k$$

pentru $|x| < \varepsilon$, vom avea $f(x) = 0$ pentru $|x| < \varepsilon$, ceea ce contrazice definiția (4.1) [pentru $x > 0$ nu putem avea $f(x) = 0$]. În plus, supp $f = \mathbb{R}_+$, deci această funcție nu are suportul compact (in $\mathbb{R}^n$ o mulțime compactă este inchisă și mărginită); definind funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = g_{[a,\, b]}(x) = f(x - a)\, f(b - x), \qquad a < b, \tag{4.2}$$

unde f este funcția definită prin (4.1), rezultă ușor $f \in C_0^{\infty}(I)$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval astfel încit $[a, b] \subset I$ iar supp $f = [a, b]$. Dacă h este analitică în I, atunci evident produsul $hg \in C_0^{\infty}(I)$ și supp$(hg) = [a, b]$, așa că utilizind funcția-test (4.2), se pot obține oricit de multe funcții-test.

Uneori este important să se utilizeze funcții indefinit derivabile care au proprietăți convenabile de mărginire; astfel, este întotdeauna posibilă definirea unei funcții h indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, astfel încît

$$h(x) = 0, \; x \leqslant a, \; 0 < h(x) < 1, \; x \in]a, b[, \; h(x) = 1, \; x \geqslant b, \tag{4.3}$$

și pentru aceasta, este suficient să scriem

$$h(x) = A \int_{-\infty}^{x} g(t)\, \mathrm{d}t, \qquad A = \left[\int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t\right]^{-1}, \tag{4.3'}$$

unde g este definit prin (4.2) $\left[\text{deoarece } g(x) \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R},\ \int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t > 0\right]$.

Dacă $n > 1$, cu ajutorul funcției g se pot defini funcții-test avînd suportul compact, punînd

$$g_n(\mathbf{x}) = g_{[a_1,\, b_1]}(x_1) \cdot g_{[a_2,\, b_2]}(x_2) \ldots g_{[a_n,\, b_n]}(x_n), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \tag{4.2'}$$

cînd suportul acestei funcții este paralelipipedul $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ (se presupune $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$); cu ajutorul funcției f definite prin (4.1) se poate defini funcția indefinit derivabilă

$$f_n(\mathbf{x}) = f(x_1 - a_1) \cdot f(x_2 - a_2) \ldots f(x_n - a_n), \;\; \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \; n > 1,$$

care nu are suportul compact și care, evident, nu este nici analitică în $\mathbb{R}^n$.

Utilizind funcția $j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definită prin

$$j(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{1 - |\mathbf{x}|^2}\right) & \text{pentru } |\mathbf{x}| < 1, \\ 0 & \text{pentru } |\mathbf{x}| \geqslant 1, \end{cases} \tag{4.4}$$

este ușor de verificat că $j \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, supp $j = B_1[0] = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, |\mathbf{x}| \leqslant 1\}$, iar funcția $j_r(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = j\left(\dfrac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{r}\right)$ este de asemenea idenfinit derivabilă în $\mathbb{R}^n$ iar supp $j_r(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = B_r[\mathbf{x}_0] = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leqslant r\}$; aici $|\mathbf{x}| = (x_1^2 + \ldots + x_1^2)^{1/2}$ dacă $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, iar prin $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/r$ se înțelege $\left(\dfrac{x_1 - x_1^0}{r}, \ldots, \dfrac{x_n - x_n^0}{r}\right)$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_1^0)$.

Vom folosi notația

$$\mathrm{D}^{\alpha} f = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha} f}{\partial \mathbf{x}^{\alpha}}, \tag{4.5}$$

unde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ este un multiindice; se notează $|\boldsymbol{\alpha}| =$

$=\alpha_1+\ldots+\alpha_n\in\mathbb{Z}_+$, cu ajutorul căreia se definesc în $C^\infty(D_n)$ sau în $C_0^\infty(D_n)$ produsele scalare

$$(f,\, g)_m=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{D_n}\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}f\cdot\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}g\ \mathrm{d}\mathbf{x},\quad m=0,1,2,\ \ldots\ ; \tag{4.6}$$

dacă $n=1$, acest produs scalar se scrie

$$(f,\, g)_m=\int_a^b[f\cdot g+f'\cdot g'+\ldots+f^{(m)}\cdot g^{(m)}]\,\mathrm{d}x=\sum_{\alpha=0}^{m}\int_a^b f^{(\alpha)}\cdot g^{(\alpha)}\mathrm{d}x,\ a<b. \tag{4.6'}$$

Axiomele produsului scalar (vezi vol. I, cap. 3), se verifică imediat; de exemplu,

$$(f,f)_m=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\int_{D_n}(\mathrm{D}^{\alpha}f)^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\geqslant 0,$$

iar $(f,\, f)_m=0$ dacă şi numai dacă $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}f=0$, $|\boldsymbol{\alpha}|=0,\,1,\,\ldots,\,n$, ceea ce înseamnă $f=0$. În acest mod se pot defini spaţiile prehilbertiene $M^m(D_n)$ şi $M_0^m(D_n)$ ca fiind spaţiile $C^\infty(D_n)$, respectiv $C_0^\infty(D_n)$ în care s-a introdus produsul scalar (4.6); evident, aceste spaţii sînt incomplete iar prin aplicarea procedeului de completare abstractă (adică ataşînd spaţiilor M^m, respectiv M_0^m elemente noi, care reprezintă limitele tuturor şirurilor fundamentale construite cu elemente din aceste spaţii prehilbertiene) se vor obţine spaţiile Hilbert

$$H^m=H^m(D_n)=\overline{M^m(D_n)},\ H_0^m=H_0^m(D_n)=\overline{M_0^m(D_n)},\quad m=0,1,2,\ \ldots,$$

care se numesc *spaţii Sobolev.*

Evident, au loc incluziunile

$$H_0^m(D_n)\subset H^m(D_n),\ \ H_0^j(D_n)\subset H_0^m(D_n),\ \ H^j(D_n)\subset H^m(D_n),\ \ j\geqslant m$$

[de exemplu, dacă $f\in H^j(D_n)$, aceasta înseamnă $\|f\|_j=\sqrt{(f,f)_m}$ şi dacă $m\leqslant j$, deoarece termenii care definesc pe $\|f\|_m$ se regăsesc în $\|f\|_j$, neapărat $\|f\|_m<\infty$, deci $f\in H^m(D_n)$ etc.]; prin urmare, dacă $f\in H^j$, avem $f\in H^m$ pentru orice $m<j$.

Deoarece spaţiile Sobolev $H^m(D_n)$ şi $H_0^m(D_n)$ se obţin prin completare abstractă din spaţiile $M^m(D_n)$, respectiv $M_0^m(D_n)$, completarea efectuîndu-se cu ajutorul normei $\|f\|_m=\sqrt{(f,\,f)_m}$, $m=0,\,1,\,2,\,\ldots,$ se deduc şi egalităţile

$$H^0(D_n)=H_0^0(D)_n=L_2(D_n),$$

$L_2(D_n)$ fiind spaţiul Lebesgue al funcţiilor sumabile avînd pătratul sumabil *) în D_n; apoi, deoarece dacă $f\in M^m(D_n)$, avem

$$\|f\|_m^2=\int_{D_n}f^2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}+\sum_{|\alpha|=1}\int_{D_n}(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}f)^2\mathrm{d}\mathbf{x}+\ldots+\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m}\int_{D_n}(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}f)^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

din $\|f\|_m<\infty$ se deduce $\int_{D_n}(\mathrm{D}^{\alpha}f)^2\mathrm{d}\mathbf{x}<\infty$ pentru orice $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $|\boldsymbol{\alpha}|_m<m$, ceea ce înseamnă $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}f\in L_2(D_n)$, dacă $|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m$. Dacă $f\in H^m(D_n)$ [sau $f\in H_0^m(D_n)$], nu putem scrie $\int_{D_n}(\mathrm{D}^{\alpha}f)^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}<\infty$, deoarece este posibil ca f să nu admită derivate parţiale şi în acest caz va exista un element $f\in L_2(D_n)$, $|\alpha|\leqslant m$, care va înlocui derivata $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}f$; într-adevăr, din definiţia lui $H^m(D_n)$, rezultă existenţa unui şir $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din $M^m(D_n)$ cu proprietatea $\varphi_k\to f$, convergenţa fiind înţeleasă în sensul normei din $H^m(D_n)$, ceea ce înseamnă că $\|\varphi_k-\varphi_j\|_m\to 0$ cînd $k,\ j\to\infty$. Or, din consideraţiile anterioare se deduce

$$\|\mathrm{D}^{\alpha}\varphi_k-\mathrm{D}^{\alpha}\varphi_j\|\to 0,\ j,\ k\to\infty,\ \ |\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m,$$

unde $\|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\,\varphi)}$, $(\varphi,\,\varphi)=(\varphi,\,\varphi)_0=\int_{D_n}\varphi^2(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ este norma din $L_2(D_n)$ iar în baza completitudinii spaţiului $L_2(D_n)$ şi în baza unicităţii limitei, se deduce

$$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi_k\to f_{\boldsymbol{\alpha}},\quad k\to\infty,$$

ar $f_{\boldsymbol{\alpha}}\in L_2(D_n)$, $|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m$, se numeşte *derivata parţială slabă* (sau *derivata parţială generalizată* sau încă *derivata parţială în sens Sobolev*) de ordin $\boldsymbol{\alpha}$ a funcţiei $f\in H^m(D_n)$ [aceleaşi consideraţii rămîn valabile şi dacă $f\in H_0^m(D_n)$] şi vom conveni să notăm $f_{\boldsymbol{\alpha}}$ prin acelaşi

*) În aceste spaţii $f=g$, dacă $f(\mathbf{x})=g(\mathbf{x})$ pentru aproape toţi $\mathbf{x}\in D_n$.

simbol (ca şi cum f ar admite efectiv derivate parţiale de ordin $\leqslant m$), adică

$$f_{\alpha} = D^{\alpha} f.$$

Această convenţie se poate justifica prin faptul că dacă $f_{\alpha} \in C^{|\alpha|}(D_n)$, atunci $f_{\alpha}(x) = D^{\alpha} f(x)$, $x \in D_n \setminus B$, B fiind o mulţime avînd măsura nulă; într-adevăr, dacă $\psi \in C_0^{\infty}(D_n)$, deoarece $D^{\alpha}\varphi_k \to f_{\alpha}$, $k \to \infty$, va rezulta

$$\lim_{k\to\infty} \int_{D_n} D \ \varphi_k \cdot \psi \, dx = \int_{D_n} f_{\alpha} \cdot \psi \, dx.$$

Integrînd prin părţi, deoarece $D^j\psi(x) = 0$ cînd $x \in \partial D_n$ pentru orice multiindice j, rezultă egalitatea $\int_{D_n} D^{\alpha} f \cdot \psi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{D_n} \varphi_k D^{\alpha} f \cdot \psi \, dx$, adică

$$\lim_{k\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{D_n} \varphi_k \cdot D^{\alpha}\psi \, dx =$$

$$= \int_{D_n} f_{\alpha} \cdot \psi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{D_n} (\lim \varphi_k) \times D^{\alpha} \psi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{D_n} f \cdot D^{\alpha} \psi \, dx$$

în ipoteza $f \in C^{|\alpha|}(D_n)$, şi deoarece $(-1)^{|\alpha|} \int_{D_n} f \cdot D^{\alpha}\psi \, dx = \int_{D_n} D^{\alpha} f \cdot \psi dx$, se obţine egalitatea

$$\int_{D_n} D^{\alpha} f \cdot \psi \, dx = \int_{D_n} f_{\alpha} \cdot \psi \, dx$$

valabilă pentru orice $\psi \in C_0^{\infty}(D_n)$ care scrisă sub forma

$$\int_{D_n} (D^{\alpha} f - f_{\alpha}) \cdot \psi \, dx = 0$$

prin aplicarea lemei fundamentale a calculului variaţiilor, rezultă $D^{\alpha} f - f_{\alpha} = 0$ ([egalitate în $L_2(D_n)$].

Aşadar, spaţiile lui Sobolev $H^m(D_n)$ şi $H_0^m(D_n)$ pot fi interpretate ca fiind o generalizare a spaţiului funcţiilor de clasă m pe

D_n, notate $C^m(D_n)$ [respectiv $C_0^{\infty}(D_n)$ dacă supp $f \subset D_n$, $f \in C^m(D_n)$]; dacă $f \in C^m(D_n)$, atunci f admite toate derivatele parţiale pînă la ordinul m inclusiv, toate aceste derivate fiind continue iar dacă $f \in H^m(D_n)$, atunci f admite toate derivatele parţiale slabe (generalizate) pînă la ordinul m inclusiv, aceste derivate parţiale fiind sumabile şi avînd în plus pătratul sumabil. Evident,

$$C^m(D_n) \subset H^m(D_n), \ C_0^m(D_n) \subset H_0^m(D_n)$$

în cazul spaţiilor C_0^m şi H_0^m situaţia este identică cu cea din spaţiile C^m şi H^m, doar că în plus supp $f \subset D_n$).

În utilizarea efectivă a acestor spaţii sînt fundamentale două teoreme.

Teorema 4.1 (*lema lui Sobolev*). *Dacă* $f \in H_0^m(D_n)$ *iar*

$$m > \frac{n}{2} + k,$$

atunci există $f^* \in C^k(D_n)$ *astfel încît* $f(x) = f^*(x)$ *aproape peste tot în* D_n *iar*

$$|D^{\alpha} f^*| \leqslant C \, \|f\|_m$$

pentru orice multiindice α *cu* $|\alpha| \leqslant k$.

Teorema 4.2 (*Rellich*). *Dacă* (u_j) *este un şir mărginit din* $H_0^m(D_r)$, *atunci există un subşir* (u_k) *al şirului iniţial convergent în spaţiul* $H_0^l(D_n)$ *cu* $l < m$ $(k = j_k, \ j_1 < j_2 < \ldots < j_k < \ldots)$.

De exemplu, lema lui Sobolev arată că dacă $n=1$ şi $f \in H_0^m([a, b])$, $m > 0$, rezultă f aproape peste tot de clasă $C^{m-1}([a, b])$, deoarece $m > (m-1) + \frac{1}{2}$ iar dacă $n=2$, $m>1$, atunci din $f \in H_0^m(D_2)$ se deduce că $f \in C_0^{m-2}(D_2)$ (aproape peste tot) pentru că $m > (m-2)+1$.

4.1.2. Operatori diferenţiali liniari

Dacă $n = 1$, în vol. I s-a definit un operator diferenţial liniar P de ordin k ca o aplicaţie de la spaţiul $C^k(I)$ la spaţiul

$C^0(I)$, I fiind un interval oarecare din $\mathbb{R}$, definit prin

$$Pu = a_0(x)\,u + a_1(x)\,u' + \ldots + a_k(x)\,u^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} a_j(x)\,u^{(j)}, \quad (4.7)$$

unde funcțiile continue pe I, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ [$a_k(x)$ nefiind nul pentru orice $x \in I$] se numesc coeficienții operatorului P; dacă $n > 1$, prin analogie, un operator diferențial liniar definit pe $G_n \subset \mathbb{R}^n$ (G_n fiind o mulțime deschisă sau un domeniu) se va scrie sub forma

$$Pu = a_0(\mathbf{x})\,u + \sum_{j=1}^{k}\sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(\mathbf{x})\,D^\alpha u = \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha(\mathbf{x})\,D^\alpha u, \quad (4.8)$$

unde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ este un multiindice (deci $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$), $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ iar a_α sînt coeficienții acestui operator diferențial liniar (care va avea ordinul k dacă există cel puțin un multiindice α cu $|\alpha| = k$, diferit de zero.

Prin definiție, operatorul diferențial P^+ scris sub forma

$$P^+v = a_0(\mathbf{x})\,v + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j \sum_{|\alpha|=j} D^\alpha[a(\mathbf{x})v] = \sum_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}\,D[a_\alpha(\mathbf{x})\,v] \quad (4.8')$$

[ceea ce implică $a_\alpha \in C^{|\alpha|}(G_m)$] se numește *operatorul diferențial formal adjunct* al operatorului diferențial liniar (4.8); în particular, dacă $a_j \in C^j(I)$, operatorul diferențial formal adjunct al operatorului (4.7) va fi

$$P^+z = a_0(x)z - [a_1(x)\,z]' + [a_2(z)z]'' - \ldots + (-1)^k[a_k(x)z]^{(k)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j[a_j(x)\,z]^{(j)} \quad (4.7')$$

și este evident că dacă se calculează derivatele care apar în (4.8′), atunci operatorul P^+ se poate scrie sub forma (4.8):

$$P^+v = \sum_{|\alpha|\leqslant k} b_\alpha(\mathbf{x})\,D^\alpha v,$$

unde $b_\alpha \in C^{|\alpha|}(G_n)$.

Proprietatea fundamentală a operatorului diferențial P^+ este exprimată prin egalitatea

$$(Pu,\ v)_0 = (u,\ P^+v)_0, \quad (4.9)$$

unde $v \in C_0^\infty(G_n)$ este o funcție-test oarecare iar $(f,\ g)_0$ este produsul scalar din $L_2(G_n)$ [vezi (4.6) pentru $m = 0$]; într-adevăr, integrînd prin părți, deoarece v este nulă în vecinătatea frontierei lui G_n (presupunînd G_n astfel încît frontiera sa ∂G_n are volumul nul în $\mathbb{R}^n$), se obține egalitatea

$$\int_{G_n} a(\mathbf{x})\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot v\,d\mathbf{x} = -\int_{G_n}\frac{\partial}{\partial x_j}(au)\cdot v\,d\mathbf{x},\ d\mathbf{x} = dx_1\ldots dx_n,$$

din care, prin iterare, se deduc și egalitățile

$$\int_{G_n} a(\mathbf{x})\,D^\alpha u\cdot v\,d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|}\int_{G_n} D^\alpha(av)\cdot u\,d\mathbf{x},$$

dacă $a \in C^{|\alpha|}(G_n)$. În continuare, avem

$$(Pu,\ v)_0 = \int_{G_n} Pu\cdot v\,d\mathbf{x} = \sum_{|\alpha|\leqslant k}\int_{G_n} a_\alpha(\mathbf{x})\,D^\alpha u\cdot v\,d\mathbf{x} =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}\int_{G_n} u\cdot D^\alpha(a_\alpha v)\,d\mathbf{x} =$$

$$= \int_{G_n} u\left[\sum_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_\alpha\,v)\right]d\mathbf{x} = (u,\ P^+v)_0,$$

în ipoteza $a_\alpha \in C^{|\alpha|}(G_n)$, ceea ce justifică egalitatea (4.9); această egalitate permite să arătăm că operatorul $P^{++} = (P^+)^+$, definit ca fiind operatorul diferențial formal adjunct al operatorului P^+, coincide cu operatorul diferențial inițial P. Într-adevăr, fie P^* operatorul diferențial care pentru orice funcții-test u și v verifică egalitatea

$$(Pu,\ v)_0 = (u,\ P^*v)_0,\quad u, v \in C_0^\infty(G_n),$$

ceea ce înseamnă, ținînd seama de (4.9), că

$$(u,\ (P^* - P^+)v)_0 = 0$$

pentru orice $u \in C_0^\infty(G_n)$, ceea ce (conform cu lema fundamentală a calculului variațiilor) este posibil numai dacă $(P^* - P^+)v = P^*v - P^+v = 0$ pentru orice funcție-test v, ceea ce înseamnă $P^* = P^+$; din (4.9) avem $(P^+v, u)_0 = (v, Pu)_0$ și cum, din definiția lui P^{++}, rezultă $(P^+v, u)_0 = (v, P^{++}u)_0$, pentru orice funcție-test v va fi valabilă egalitatea $(v, Pu)_0 = (v, P^{++}u)_0$, ceea ce înseamnă $P^{++} = P$.

Egalitatea (4.9) este adevărată dacă $u \in C^k(G_n)$, $v \in C_0^k(G_n)$ și dacă $u, v \in C_0^k(G_n)$, dar nu este adevărată, în general, dacă $u, v \in C^k(G_n)$ decît dacă se impun anumite condiții pentru u și v pe G_n.

Exemple. 1. Dacă $n=1$ și $k=2$, se obține operatorul diferențial de ordinul al doilea

$$Py = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y \tag{4.10}$$

pentru care, dacă $a_2 \in C^2(I)$, $a_1 \in C^1(I)$, $a_0 \in C^0(I)$, operatorul formal adjunct se scrie

$$P^+z = (a_2z)'' - (a_1z)' + a_0z = a_2z'' + (2a_2' - a_1)z' + (a_2'' - a_1' + a_0)z; \tag{4.10'}$$

se observă că dacă se scrie $P^+z = b_2z'' + b_1z' + b_0z$, avem $b_2 = a_2$, $b_1 = 2a_2' - a_1$, $b_0 = a_2'' - a_2' + a_0$ și deci $b_2 \in C^2(I)$, $b_1 \in C^1(I)$, $b_0 = C^0(I)$, ceea ce permite să scriem direct operatorul P^{++}:

$$P^{++}u = (b_2u)'' - (b_1u)' + b_0u = b_2u'' + (2b_2' - b_1)u' + (b_2'' - b_1' + b_0)u$$

și prin înlocuirea coeficienților b_2, b_1 și b_0 rezultă

$$b_2 = a_2,\ 2b_2' - b_1 = a_1,\ b_2'' - b_1' + b_0 = a_0,$$

ceea ce înseamnă că s-a verificat direct egalitatea $P^{++} = P$.

2. Dacă $k=2$ $(n>1)$, se obține operatorul diferențial

$$Pu = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a(\mathbf{x})u,\ a_{jk} = a_{kj}, \tag{4.11}$$

pentru care, dacă $a_{jk} \in C^2(G_n)$, $a_j \in C^1(G_n)$, $a \in C^0(I)$, operatorul formal adjunct se scrie

$$P^+v = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(a_{jk}v) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_jv) + av \tag{4.11'}$$

și urmînd calea din exemplul 1, se arată ușor că $P^{++} = P$.

Dacă $P^+ = P$ [adică dacă $P^+u = Pu$ pentru orice $u \in C^k(G_n)$], atunci operatorul diferențial P se numește *formal autoadjunct*, în care caz egalitatea (4.9) se scrie

$$(Pu, v)_0 = (u, Pv)_0 \tag{4.9'}$$

în condițiile în care este valabilă (4.9).

Exemple. 3. În cazul operatorului diferențial (4.10) vom avea $P = P^+$ dacă $a_1 = a_2'$; or, deoarece se știe că orice operator diferențial de forma (4.10), se poate scrie sub forma autoadjunctă

$$Py = (p(x)y')' + q(x)y = p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y$$

$\left[\text{prin înmulțire cu } a_2^{-1} \exp\left(\int \frac{a_2}{a_1}\,dx\right) \text{ și notînd } p(x) = \exp\left(\int \frac{a_2}{a_1}\,dx\right),\ q(x) = \frac{a_0}{a_2}\exp\left(\int \frac{a_2}{a_1}\,dx\right)\right]$, se deduce ușor că $P^+ = P$ (avem $a_2 = p$, $a_1 = p'$), ceea ce justifică denumirea de formă autoadjunctă dată operatorului $Py = (py')' + qy$.

4. În cazul operatorului diferențial liniar (4.11), pentru ca acesta să fie formal autoadjunct, trebuie să se scrie sub forma

$$Pu = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_k}\right] + a(\mathbf{x})u,\ a_{jk} = a_{kj} \in C^2(G_n); \tag{4.12}$$

se verifică ușor că $P^+ = P$ precum și implicația inversă.

Este ușor de constatat că operatorul diferențial (4.8) va putea fi formal autoadjunct numai dacă are ordin par; într-adevăr, din (4.8') se deduce

$$P^+v = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [a(\mathbf{x})v] = (-1)^k a_k(\mathbf{x}) D^k v + \ldots$$

și pentru a avea $Pu = P^+u$ pentru orice $u \in C^k$, va trebui să avem $k = 2, 4, \ldots$

Luînd ca model forma (4.12), vom spune că operatorul diferențial de ordin par k

$$Pu = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u \tag{4.8}$$

este scris sub forma divergentă, dacă

$$Pu = \sum_{0 \leq m,\ j \leq k'} (-1)^{|m|} D^m(b_{jm}(\mathbf{x}) D^j u), \tag{4.8''}$$

cu $k' = \frac{k}{2}$ (k este par prin ipoteză); în ipoteza $a_\alpha \in C^{|\alpha| - k'}(G_n)$, cînd $|\alpha| \geq k'$, forma divergentă (4.8'') se poate deduce din (4.8) prin aplicarea convenabilă a formulei de derivare a unui produs și se va obține $a_\alpha = (-1)^m b_{jm}$ dacă $|\alpha| = k = 2k'$, $m = |j| = k'$.

De exemplu, în cazul operatorului diferențial (4.11), forma divergentă se scrie

$$\mathrm{P}u = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{jk}(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left[a_j(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_{jk}(\mathbf{x})}{\partial x_k}\right]\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(\mathbf{x})\,u.$$

Scrierea sub formă divergentă a unui operator diferențial are avantajul că forma operatorului formal adjunct este asemănătoare cu forma (4.8''); mai precis, avem

$$\mathrm{P}^{+}v = \sum_{0 \leqslant |j|,\ |m| \leqslant k'} (-1)^{|j|}\mathrm{D}^{j}[b_{jm}(\mathbf{x})\,\mathrm{D}^{m}v],$$

după cum se verifică imediat.

4.1.3. Soluții slabe pentru ecuații cu derivate parțiale

Dacă P este un operator diferențial, de ordin k, adică

$$\mathrm{P}u = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(\mathbf{x})\,\mathrm{D}^{\alpha}u, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_j \in \mathbb{Z}_+,$$

atunci, prin soluție (ordinară, clasică, regulată) în G_n a ecuației

$$\mathrm{P}u = F, \tag{4.13}$$

unde $F \in C^0(G_n)$ este o funcție dată, se înțelege o funcție $u \in C^k(G_n)$ cu proprietatea $(\mathrm{P}u)(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x} \in G_n$; evident, această soluție poate verifica și anumite condiții suplimentare (de exemplu, să verifice condiții inițiale, la limită, de regularitate în anumite puncte etc.).

Luînd în considerație (4.9), se deduce că pentru orice soluție u a ecuației (4.13) este valabilă egalitatea

$$(u,\ \mathrm{P}^{+}v)_0 = (F,\ v)_0 \tag{4.14}$$

în ipoteza că v este o funcție-test, $v \in C_0^\infty(G_n)$ (este posibil să presupunem $v \in C_0^m(G_n)$, dar nu se obține nici un fel de generalizare a noțiunilor care ne interesează acum); relația (4.14) se transcrie sub forma echivalentă

$$\int_{G_n} u(\mathbf{x})\,(\mathrm{P}^{+}v)(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{G_n} F(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{4.14'}$$

care rămîne valabilă și fără ipoteza $u \in C^k(G_n)$: este suficient să presupunem $u \in L_2(G_n)$.

În acest fel, în mod natural, se introduce noțiunea de *soluție slabă* (sau *soluție generalizată în sens Sobolev*) a ecuației (4.13); în plus, u poate admite derivate generalizate pînă la un ordin $l > 0$, adică este posibil ca $u \in H^m(G_n)$ [sau $u \in H_0^m(G_n)$].

Evident, orice soluție ordinară a ecuației (4.13) este automat o soluție slabă, dar reciproca nu este adevărată: pot exista soluții slabe pentru o ecuație dată care să nu admită un număr suficient de derivate astfel încît această ecuație să fie verificată în orice punct.

Exemplul 5. Ecuația cu derivate parțiale

$$\mathrm{P}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

este verificată de funcția $u(x, y) = f(x + y)$ (după cum se verifică ușor); este evident că $u \in C^2$ dacă $f \in C^2$ și vom avea

$$\iint_{G_2} f(x + y)[\mathrm{P}v(x, y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0 \tag{4.15}$$

pentru orice $v \in C_0^\infty(G_2)$, deoarece $\mathrm{P}^{+} = \mathrm{P}$; dar această ultimă egalitate este verificată și pentru orice $f \in L_2(\mathbb{R})$, deoarece există întotdeauna un șir (f_j) de funcții din $C^2(\mathbb{R})$ astfel încît $\|f - f_j\|_0 \to 0$ cînd $j \to \infty$, ceea ce dă posibilitatea trecerii la limită sub semnul integralei din egalitatea

$$\iint_{G_2} f_n(x + y)\,[\mathrm{P}v(x, y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

obținîndu-se (4.15), dar cu $f \in L_2$. Așadar, ecuația $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ admite efectiv soluții slabe care nu sînt soluții în sens clasic.

Evident, un raționament analog celui din 4.1.1, prin care s-a arătat că derivatele slabe coincid cu derivatele parțiale ordinare, dacă derivatele slabe sînt de o clasă dată, conduce la concluzia că dacă o soluție slabă a ecuației (4.13) este de clasă $C^m(G_n)$, atunci soluția slabă în cauză va deveni o soluție obișnuită.

Un procedeu efectiv de construcție a soluțiilor slabe pentru ecuația $\mathrm{P}u = F$ îl poate constitui cel indicat în exemplul 5; scriind sistemul de ecuații $\mathrm{P}u_j = F_j$, $j \in \mathbb{N}$, $F_j \to F$ (convergență în L_2), $F_j \in C^\infty$, dacă $u_j \in C^m(G_n)$ iar $u_j \to u \in L_2(G_n)$, atunci u va fi o soluție slabă a ecuației $\mathrm{P}u = F$, deoarece prin trecere la limită (cînd $j \to \infty$) în egalitatea $(u_j,\ \mathrm{P}^{+}v)_0 = (F_j,\ v)_0$, $v \in C_0^\infty(G_n)$, se obține egalitatea de definiție (4.14'). Avem

$$\lim\,(u_j,\ \mathrm{P}^{+}v)_0 = (\lim u_j,\ \mathrm{P}^{+}v)_0, \quad \lim\,(F_j,\ v)_0 = (\lim F_j,\ v)_0,$$

deoarece $u_j \to u$ și $F_j \to F$, convergență în sensul lui L_2.

Soluțiile slabe obținute prin acest procedeu se numesc uneori și *soluții forte* (sau *soluții tari*) ale ecuației $Pu = F$ și, evident, este posibil să existe soluții slabe ale ecuației date care să nu poată fi obținute prin acest procedeu.

Marea importanță practică a noțiunii de soluție slabă decurge din faptul că prin utilizarea metodelor analizei funcționale este posibil uneori să se demonstreze cu ușurință existența unei soluții slabe pentru ecuațiile cu derivate parțiale, pe cînd procedeele clasice conduc mult mai greu la același rezultat; este apoi posibil să se arate că soluția slabă posedă un anumit număr de derivate parțiale, ceea ce conduce la noțiunea de soluție clasică.

Observații. 1. Dacă se utilizează funcții $f: G_n \to \mathbb{C}$, atunci toate considerațiile anterioare rămîn valabile cu condiția utilizării produselor scalare de forma

$$(f, g)_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{G_n} \overline{D^\alpha f} \cdot D^\alpha g \, d\mathbf{x}$$

sau

$$(f, g)_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \int_{G_n} D^\alpha f \cdot \overline{D^\alpha g} \, d\mathbf{x},$$

ceea ce face ca operatorul formal adjunct P^+ să aibă forma

$$P^+ v = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [\overline{a}_\alpha(\mathbf{x}) v].$$

2. Noțiunea de operator formal adjunct este utilizată pentru a diferenția acești operatori de *operatorii strict adjuncți* (pe care însă nu-i vom utiliza în viitor).

4.1.4. Operatori liniari închiși

Fie X și Y două spații vectoriale normate și $A : X \to Y$ un operator liniar (adică

$$A\left(\sum_{j=1}^{p} a_j f_j\right) = \sum_{j=1}^{p} a_j A f_j$$

pentru orice scalari a_j și orice $f_j \in X$, $j = 1, \ldots, n$); acest operator se numește mărginit dacă există $c \in \mathbb{R}_+$ astfel încît

$$\|Af\|_Y \leqslant c \, \|f\|_X \tag{4.16}$$

pentru orice $f \in X$ ($\|\cdot\|_X$ și $\|\cdot\|_Y$ sînt normele definite în X, respectiv Y). Orice operator liniar mărginit fiind lipschitzian va fi continuu și reciproc: orice operator liniar și continuu, definit pe X, este totodată și mărginit; cu alte cuvinte, din (4.16) se deduce

$$\lim_{j \to \infty} A f_j = A f, \quad \text{dacă} \quad f_j \to f. \tag{4.16'}$$

Operatorii diferențiali P definiți la 4.1.2 sînt operatori mărginiți dacă se presupune P aplicație de la $C^k(G_n)$ la $C^0(G_n)$, norma în spațiul $C^k(G_n)$ (G_n fiind un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^n$) fiind definită prin

$$\|f\|_k = \max_{\mathbf{x} \in G_n} |f(\mathbf{x})| + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant k} \max_{\mathbf{x} \in G_n} |D^\alpha f(\mathbf{x})| = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \max_{\mathbf{x} \in G_n} |D^\alpha f(\mathbf{x})|.$$

Într-adevăr, din (4.8), notînd $c = \max_{x \in G_n} \{|a_\alpha(\mathbf{x})|\}$, $|\alpha| \leqslant k$, se deduce

$$\|Pf\|_0 = \|\sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha f(\mathbf{x})\| \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant k} c \|D^\alpha f\|_0 = c\|f\|_m.$$

Situația însă se modifică dacă P este considerat ca o aplicație de la subspațiul $C^k(G_n)$ al spațiului $C(G_n)$ în spațiul $C(G_n)$ (cu alte cuvinte, dacă dorim să avem o inegalitate de forma $\|Pf\|_0 \leqslant c\|f\|_0$, atunci acest lucru nu este, în general, posibil); pentru a ne convinge de acest fapt, fie $X = Y = C^0([0, 1])$ și $(Pf)(x) = f'(x)$, P fiind definit pe $C^1([0, 1]) \subset C^0([0, 1])$ și fie șirul (x^n) din $C^0([0, 1])$. Avem

$$\|x^n\|_0 = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |x^n| = 1, \; \|Px^n\|_0 = \|nx^{n-1}\|_0 = n\|x^{n-1}\|_0 = n$$

și deci nu se poate să avem $\|Px^n\|_0 \leqslant c\,\|x^n\|_0$ (deoarece aceasta ar însemna $n \leqslant c$).

Prin urmare, operatorii diferențiali liniari pot să nu fie mărginiți (continui) dar posedă o proprietate importantă asemănătoare proprietății de continuitate, fiind *operatori închiși*.

Operatorul A (liniar sau nu), avînd mulțimea de definiție $\mathscr{D}_A \subset X$, va fi un *operator închis* dacă din condițiile

$$f_j \in \mathscr{D}_A, \; \lim f_j = f \in X, \; \lim(Af_j) = g \tag{4.17}$$

rezultă

$$f \in \mathscr{D}_A \; \text{și} \; Af = g. \tag{4.17'}$$

Diferența dintre operatorii continui și cei închiși constă în următoarele : dacă A este un operator continuu și $\lim f_j = f \in \mathcal{D}_A$, atunci există $\lim Af_j = Af = A(\lim f_j)$, pe cînd un operator este închis dacă din convergența șirului (f_j) din $\mathcal{D}_A$ către $f \in X$, neapărat $f \in \mathcal{D}_A$ iar șirul (Af_j) este convergent către elementul Af. Dacă un operator A are proprietatea că din convergența șirului (f_j) din $\mathcal{D}_A$ se deduce convergența șirului (Af_j) (în care caz limita este unic determinată), se spune că operatorul A este *preînchis* (sau că admite o *prelungire închisă*).

Printre toate prelungirile închise posibile ale unui operator A preînchis un rol important îl joacă așa-numita *prelungire închisă minimală* a operatorului A, definită ca fiind acea prelungire închisă a operatorului A este conținută în orice altă prelungire închisă a aceluiași operator A ; vom nota prin $\bar{A}$ prelungirea închisă minimală a operatorului A (dacă există) și pentru a obține operatorul $\bar{A}$ este suficient să se definească mulțimea de definiție $\mathcal{D}_{\bar{A}}$ a acestui operator. Construcția mulțimii $\mathcal{D}_{\bar{A}}$ poate fi realizată în modul următor : se consideră toate șirurile (f_j) din $\mathcal{D}_A$ convergente (către elemente f din $\mathcal{D}_A$ sau din X) care sînt astfel încît șirurile (Af_j) sînt convergente (în spațiul Y) ; se adaugă elementele $f = \lim f_j$ la $\mathcal{D}_A$ (dacă $f \in X$) și prin definiție, se scrie

$$\bar{A}f = \lim_{j\to\infty} A f_j .$$

Deoarece convergența unui șir implică unicitatea limitei, rezultă că operatorul $\bar{A}$ este perfect definit și $\bar{A}$ este o prelungire (extensie) a operatorului A ; în plus, $\bar{A}$ este un operator închis, deoarece dacă șirul $(\bar{f}_j)$ din $\mathcal{D}_{\bar{A}}$ converge către $\bar{f} \in X$ iar $\bar{A}\bar{f}_j \to \bar{g} \in Y$, în baza definiției lui $\bar{A}$, există $f_j \in \mathcal{D}_A$, astfel încît

$$\|f_j - \bar{f}_j\|_X < \frac{1}{j}, \qquad \|Af_j - \bar{A}\bar{f}_j\|_Y < \frac{1}{j},$$

ceea ce antrenează

$$\bar{f} = \lim \bar{f}_j = \lim f_j \in \mathcal{D}_{\bar{A}}, \quad \lim \bar{A}\bar{f}_j = \lim A f_j,$$

ceea ce înseamnă $\lim \bar{A}\bar{f}_j = \bar{A}\bar{f}$ și deci $\bar{f} \in \mathcal{D}_{\bar{A}}$ iar $\bar{A}\bar{f} = \bar{g}$.

Un criteriu simplu care să permită stabilirea posibilității ca un operator liniar A să fie preînchis este următorul :

Operatorul liniar $A : \mathcal{D}_A \subset X \to Y$, X și Y fiind spații Banach, este preînchis dacă și numai dacă din condițiile

$$f_j \in \mathcal{D}_A,\ f_j \to 0,\ Af_j \to g \in Y \tag{4.17''}$$

se deduce $g = 0$.

Într-adevăr, cum A este o aplicație liniară, dacă A este operator închis, avem $g = A0 = 0$; reciproc, va fi suficient să arătăm că șirurile (f_j) din $\mathcal{D}_A$ care converg către $f \in X$, determină aceeași limită pentru șirurile (Af_j) din Y. Or, dacă $f_j \to f$, $f_j^* \to f$, $Af_j \to g$, $Af_j^* \to g^*$, $g, g^* \in Y$, șirul $(f_j - f_j^*)$ va converge către zero iar $A(f_j - f_j^*) = Af_j - Af_j^* \to g - g^* \in Y$ și în baza condițiilor (4.17'') va trebui să avem $g = g^*$; în plus, prin trecere directă la limită, se arată că $\bar{A}$ va fi un operator liniar.

În baza acestor noțiuni, vom putea da o explicație faptului că pentru operatori diferențiali liniari este posibilă extinderea noțiunii de soluție așa cum s-a realizat în 4.1.3 ; această explicație se bazează pe faptul că în $L_2(G_n)$ orice operator diferențial liniar, pentru care se poate defini operatorul formal adjunct, este un operator preînchis și de aceea, dacă $Pu = F$ iar $u \in \mathcal{D}_P$, atunci u este o soluție clasică a acestei ecuații, pe cînd dacă $u \in \mathcal{D}_{\bar{P}} \setminus \mathcal{D}_P$, atunci u va fi o soluție slabă a aceleiași ecuații (aici $\mathcal{D}_P = C^k(G_n)$ sau $\mathcal{D}_P = C_0^k(G_n)$ iar $\mathcal{D}_{\bar{P}} = L_2(G_n)$).

Pentru a arăta că operatorul diferențial

$$Pu = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x})\, D^\alpha u$$

este preînchis, vom utiliza egalitatea $(u, P^+ v)_0 = (Pu, v)_0$, unde v este o funcție-test ; dacă (u_j) este un șir din $\mathcal{D}_P = C^k(G_n)$, $u_j \to 0$ [în sensul convergenței din $L_2(G_n)$], vom avea

$$(u_j, P^+ v)_0 = (Pu_j, v)_0 \tag{4.17}$$

și deoarece $u_j \to 0$, avem $(u_j, P^+ v)_0 \to 0$, iar dacă $Pu_j \to g$, se deduce prin trecere la limită în (4.17) egalitatea $(g, v)_0 = 0$, care nu poate fi verificată pentru orice funcție-test v decît dacă $g = 0$. Aplicînd criteriul enunțat, rezultă faptul că P este un operator diferențial preînchis.

4.1.5. Sensul fizic al noțiunii de operator diferențial formal autoadjunct

Pentru a prezenta un caz concret, vom lua în considerație cazul particular al ecuației undelor din $\mathbb{R}^n$, înțelegînd prin aceasta ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_n u, \tag{4.18}$$

unde Δ_n este operatorul lui Laplace din $\mathbb{R}^n$,

$$\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \tag{4.18'}$$

care, în primă aproximație, caracterizează modul de propagare al undelor (sonore, elastice etc.); este evident că operatorul lui Laplace este formal autoadjunct ($\Delta_n^+ = \Delta_n$) și vom arăta că acest fapt antrenează verificarea legii conservării energiei [pentru fenomenul care conduce la ecuația (4.18)]. În acest caz, $-\Delta_n u$ (care poate fi un vector dacă u este un vector) este strîns legat de acțiunea forțelor pe unitatea de masă în această mișcare iar dacă se notează $\mathrm{M}u = \mu(x)\, u(x)$, se obține masa sistemului în deplasare raportat la unitatea de volum (sau arie, respectiv lungime) în punctul x și deci $-\mathrm{M}\Delta_n u$ va defini densitatea forțelor acționînd în acest caz; în ipoteza că $-\mathrm{M}\Delta_n u$ depinde liniar de deplasarea u, notînd cu U energia potențială a sistemului, această energie se poate exprima cu ajutorul produsului scalar sub forma

$$U = \frac{1}{2}(u, -\mathrm{M}\,\Delta_n u)_0$$

pe cînd energia cinetică T se va scrie

$$T = \frac{1}{2}(\dot{u}, \mathrm{M}\,\dot{u})_0, \quad \dot{u} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},$$

Prin urmare, energia totală a sistemului va fi

$$E = T + U = \frac{1}{2}(\dot{u}, \mathrm{M}\,\dot{u})_0 - \frac{1}{2}(u, \mathrm{M}\Delta_n u)_0$$

și se verifică ușor, deoarece

$$\dot{E} = \frac{1}{2}(\dot{u}, \mathrm{M}\ddot{u} - \mathrm{M}\Delta_n u) - \frac{1}{2}(\mathrm{M}\ddot{u} - \mathrm{M}\Delta_n u, \dot{u}) = 0$$

iar $\mathrm{M}\,\Delta_n$ este formal autoadjunct, că $E = E_0 \in \mathbb{R}$.

În cazul ecuației lui Schrödinger

$$\dot{u} + \mathrm{i}\,\mathrm{P}u = 0$$

utilizată în mecanica cuantică, faptul că produsul scalar

$$(u, u)_0 = \int_{G_n} |u|^2\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

rămîne constant (și egal cu unitatea) prezintă o importanță deosebită și acest fapt se îndeplinește dacă operatorul diferențial P este formal autoajunct. Într-adevăr, folosind observația 1 de la 4.1.3, se deduce

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u, u)_0 = (\dot{u}, u)_0 + (u, \dot{u})_0 = (-\mathrm{i}\mathrm{P}u, u)_0 + (u, -\mathrm{i}\mathrm{P}u)_0 = -$$
$$= -\mathrm{i}(\mathrm{P}u, u)_0 + \mathrm{i}(u, \mathrm{P}u) = 0,$$

deci $(u, u)_0 = \text{const.}$

4.2. Probleme la limită pentru operatori diferențiali

4.2.1. Condiții la limită

O ecuație diferențială sau cu derivate parțiale admite, în principiu, nu o singură soluție ci o infinitate; uneori, este posibil să se definească așa-numita „soluție generală" a ecuației în cauză, care conține un număr bine determinat de parametri arbitrari (constante sau funcții) iar orice soluție a ecuației se poate obține prin particularizarea sau eliminarea acestor parametri. O definiție

pentru integrala generală a unei ecuaţii diferenţiale sau cu derivate parţiale este destul de dificil de dat : în cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n se poate spune că soluţia generală a acesteia conţine un număr de n parametri reali iar în cazul ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întîi, această soluţie conţine o funcţie arbitrară etc. Pentru cazul unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordin superior lui unu, s-ar putea defini soluţia generală ca fiind acea soluţie care conţine un număr de funcţii arbitrare [de $k-1$ variabile independente, dacă $u = u(x_1, \ldots, x_k)$ este funcţia căutată], egal cu ordinul ecuaţiei în studiu ; dar se constată că uneori este foarte dificil să se obţină orice soluţie particulară a ecuaţiei prin particularizarea acelor funcţii, aşa că practic, de multe ori soluţia generală nu uşurează procesul de calcul al soluţiei cerute de împrejurările speciale în care se lucrează (această soluţie poate fi obţinută mai simplu netrecînd prin soluţia generală). Pe de altă parte, problemele efective care trebuie rezolvate nu impun obţinerea unei soluţii oarecare a ecuaţiei considerate, ci solicită determinarea soluţiei (sau soluţiilor) care verifică anumite condiţii suplimentare bine precizate ; de aceea nu este important să se ştie dacă o ecuaţie (diferenţială sau cu derivate parţiale) admite o soluţie generală, ci dacă admite sau nu o soluţie verificînd condiţiile impuse.

Condiţiile suplimentare cele mai întîlnite sînt fie condiţiile iniţiale (sau condiţii Cauchy) care de obicei se consideră la momentul iniţial $t = t_0$, fie condiţiile la limită, care se presupun date pe frontiera unui domeniu, fie condiţii mixte, cînd se întîlnesc atît condiţii iniţiale, cît şi condiţii la limită.

Condiţiile iniţiale se referă în special la una din variabile, care are interpretare de timp, dar există probleme practice în care nu se cunosc condiţii ataşate momentului iniţial (de exemplu, cînd se solicită determinarea unui cîmp potenţial într-un domeniu dat, se dau valorile acestui cîmp pe frontiera domeniului, care nu se modifică în timp) şi se referă, de regulă, la frontiera unui domeniu.

Dacă ecuaţia cu derivate parţiale se scrie, cu $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$

$$F(\mathbf{x}, u, \mathrm{D}u, \ldots, \mathrm{D}^{\alpha}u, \ldots) = 0,$$

ordinul maxim de derivare în raport cu variabila x_0 fiind p, atunci vom scrie condiţiile iniţiale (în raport cu x_0) sub forma

$$u(\mathbf{x})\Big|_{x_0=0} = f_1(\mathbf{x}'), \ldots, \frac{\partial^{p-1}u}{\partial x^{p-1}}\Big|_{x_0=0} = f_p(\mathbf{x}')$$

cu $\mathbf{x}' = (x_1, \ldots, x_n), f_1, \ldots, f_p$ fiind funcţii cunoscute (în mulţimea sa de definiţie).

Condiţiile la limită nu se pot scrie într-o formă la fel de simplă, aşa cum a fost cazul condiţiilor iniţiale ; de exemplu, dacă $\mathbf{x}' \in \bar{D}_n$ iar ∂D_n este o suprafaţă $n-1$ dimensională din $\mathbb{R}^n$, avînd plan tangent care variază continuu odată cu punctul de tangenţă, atunci condiţiile la limită sînt de forma $\mathrm{L}_0(\mathbf{x}, u, \mathrm{D}_l u, \ldots, \mathrm{D}_l^q u) = 0$, unde L_0 este un operator diferenţial de un ordin convenabil definit pe D_n iar D_l este operatorul de derivare în raport cu o direcţie $\mathbf{l}$ din $\mathbb{R}^n$, de obicei netangentă la ∂D_n.

Pentru o mai corectă înţelegere a noţiunii de condiţii de limită, să considerăm ecuaţia diferenţială

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad n \geqslant 2, \tag{4.19}$$

unde $x \in [a, b]$, $y : [a, b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $y \in C^n([a, b])$ şi să notăm prin

$$y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)}, \tag{4.19'}$$

valorile funcţiei y şi a primelor $n-1$ derivate în punctele a şi b respectiv ; vom nota prin $L_j(y)$ o combinaţie liniară formată cu valorile (4.19′), adică

$$L_j(y) = \alpha_{0j}y_a + \alpha_{1j}y'_a + \ldots + \alpha_{n-1,j}y_a^{(n-1)} + \beta_{0j}y_b + \beta_{1j}y' + \ldots$$
$$\ldots + \beta_{n-1,j}y_b^{(n-1)}, \quad j = 1, 2 \ldots, \tag{4.19''}$$

unde α_{pj}, β_{pj} sînt numere reale [dacă $y(x) \in \mathbb{R}$] sau complexe [dacă $y(x) \in \mathbb{C}$]. Vom face ipoteza naturală că formele liniare (4.19″) sînt independente între ele şi că nu sînt nule.

Prin definiţie, condiţiile

$$L_j(y) = \gamma_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.20}$$

se numesc *condiţii la limită* ataşate ecuaţiei diferenţiale (4.19), γ_j fiind numere reale (sau complexe) ; dacă $\gamma_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, condiţiile (4.20) se numesc *omogene* iar dacă $|\gamma_1| + \ldots + |\gamma_m| > 0$, aceleaşi condiţii se vor numi *neomogene*. Evident, s-a luat în consideraţie cazul condiţiilor la limită liniare ; în mod analog se pot defini şi condiţiile la limită oarecare în care formele liniare (4.19″) se înlocuiesc prin funcţii date de variabilele (4.19′).

În cazul ecuațiilor cu derivate parțiale situația se prezintă în mod analog iar condițiile la limită cel mai frecvent utilizate sînt condițiile Dirichlet, care se scriu

$$u\Big|_{\partial D_n} = f_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D_n} = f_2, \ldots, \frac{\partial^{q-1} u}{\partial \nu^{q-1}}\Big|_{\partial D_n} = f_q, \qquad (4.21)$$

în ipoteza că ν este versorul normalei la ∂D_n iar ecuația cu derivate parțiale $\mathrm{P}u = F$ este de ordin $k = 2q$; funcțiile $f_1, f_2, \ldots, f_q$ se presupun cunoscute pe suprafața ∂D_n și se numesc *date Dirichlet*.

4.2.2. Funcții și valori proprii

Vom presupune că P este un operator diferențial liniar avînd mulțimea de definiție M; elementul $u \in M$ se numește *funcție proprie* a operatorului P corespunzînd valorii proprii $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, dacă $u \not\equiv 0$ iar

$$\mathrm{P}u = \lambda u. \qquad (4.22)$$

Este posibil ca unei valori proprii λ să-i corespundă mai multe funcții proprii liniar independente iar mulțimea acestor elemente va forma un subspațiu liniar al mulțimii M, numit ***subspațiu propriu corespunzînd valorii proprii*** λ; într-adevăr, în baza liniarității operatorului P, din egalitățile $\mathrm{P}u_j = \lambda u_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$, se deduce ușor egalitatea $\mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{p} a_j u_j\right) = \sum_{j=1}^{p} a_j \mathrm{P} u_j$ și deci

$$\mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{p} a_j u_j\right) = \lambda\left(\sum_{j=1}^{p} a_j u_j\right),$$

iar $\sum_{j=1}^{p} a_j u_j \not\equiv 0$, deoarece $u_1, \ldots, u_p$ sînt elemente liniar independente din M. Dimensiunea subspațiului propriu corespunzînd valorii proprii λ se numește *ordinul de multiplicitate* a acestei valori proprii.

În cazul considerațiilor noastre, se presupune $M \subset L_2(D_n)$ și de aceea utilizînd noțiunile proprii spațiului Hilbert L_2, se pot obține unele variante ale definiției anterioare care sînt utile în practică; astfel, deoarece $u \not\equiv 0$, în baza liniarității lui P, se deduce ușor

că orice funcție proprie poate fi considerată normată; în caz contrar scriind $v = \dfrac{u}{\|u\|_0}$, avem $\|v\|_0 = 1$ și

$$\mathrm{P}v = \mathrm{P}\left(\frac{u}{\|u\|_0}\right) = \frac{1}{\|u\|_0}\,\mathrm{P}u = \lambda \frac{u}{\|u\|_0} = \lambda v.$$

În plus, utilizînd procedeul de ortogonalizare, în subspațiul propriu corespunzînd valorii proprii λ, mulțimea funcțiilor proprii va forma o bază ortonormală.

Definiția anterioară a funcțiilor proprii presupune u soluție ordinară (clasică) a ecuației $\mathrm{P}u - \lambda u = 0$; utilizînd definiția soluțiilor slabe a ecuațiilor cu derivate parțiale (vezi 4.1.3), se poate defini și noțiunea de funcție proprie în sens generalizat, ceea ce va fi realizat ulterior.

Exemple. 6. Dacă M este mulțimea funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ astfel încît $f \in C^1(\mathbb{R})$ iar $|f(x)| \leqslant m$, $x \in \mathbb{R}$, atunci, dacă $\mathrm{P}u = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, scriind $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \lambda\, u$, soluțiile vor fi neapărat de forma

$$u(x) = c \exp\,(\lambda\, x)$$

și pentru ca u să fie un element din M trebuie să presupunem $\lambda = \mathrm{i}\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$. Așadar, dacă $\lambda \in \mathbb{C}$, orice număr complex pur imaginar va fi o valoare proprie a operatorului P iar dacă $\lambda \in \mathbb{R}$, avem doar o singură valoare proprie ($\lambda = 0$), funcțiile proprii fiind $\operatorname{cis}(\mu\, x)$, respectiv 1 (neluînd în considerație constanta multiplicativă).

7. Dacă M este mulțimea funcțiilor $f: [-\pi, +\pi] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2([-\pi, +\pi])$, periodice cu perioada 2π, adică $f(-\pi) = f(+\pi)$, iar $\mathrm{P}u = \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}$, scriind ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = \lambda u$$

pentru ca să avem $u \in M$, trebuie presupus $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{Z}$, funcțiile proprii fiind $\cos(nx)$ și $\sin(nx)$, dacă $n \neq 0$ și 1 dacă $n = 0$ (deci dacă $\lambda = 0$).

8. Dacă $M = \{f \mid f \in C^2([0, l]),\ f(0) = 0,\ f(l) = 0\}$, iar $\mathrm{P}f = f''$, atunci se verifică ușor că valorile proprii vor fi $\lambda = -\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$, $n \in \mathbb{N}$, iar funcțiile proprii, făcînd abstracție de factorul multiplicativ, vor fi $\sin\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Mulțimea valorilor proprii ale unui operator dat formează *spectrul* acestui operator (evident, un operator este definit nu numai de expresia sa analitică concretă, ci și de mulțimea sa de definiție) și exemplele anterioare arată că spectrul unui operator diferențial

poate fi o mulțime discretă sau nu; astfel, în exemplul 6, în ipoteza $\lambda = i\mu$, spectrul este continuu iar în exemplele 7 și 8 (ca și în exemplul 6, cazul $\lambda \in \mathbb{R}$) spectrul este discret. Pentru nevoile acestui tratat este important cazul în care spectrul operatorilor diferențiali considerați este discret, formînd o mulțime numărabilă de numere (așa cum a fost cazul în exemplele 7 și 8), această situație permițînd utilizarea unei metode de rezolvare a unor probleme, de regulă mixte, pentru ecuații cu derivate parțiale liniare. Această metodă este una din primele metode utilizate în integrarea ecuațiilor liniare cu derivate parțiale și poartă denumirea de *metoda separării variabilelor* sau *metoda Fourier-Bernoulli*.

4.3. Metoda separării variabilelor

Metoda separării variabilelor se aplică ecuațiilor liniare în prezența unor condiții la limită sau condiții mixte convenabile; condițiile la limită se presupun astfel date încît este posibilă determinarea unui șir de funcții proprii care să formeze un sistem complet într-un spațiu funcțional atașat problemei în studiu.

Vom presupune că se cere soluția ecuației cu derivate parțiale

$$\mathrm{L}u - \mathrm{P}u = F(t, x) \tag{4.23}$$

în care

$$\mathrm{L}u = b_0 \frac{\partial^q u}{\partial t^q} + b_1 \frac{\partial^{q-1} u}{\partial t^{q-1}} + \dots + b_{q-1} \frac{\partial u}{\partial t} + b_q u, \tag{4.24}$$

$$\mathrm{P}u = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha(\mathbf{x})\, \mathrm{D}^\alpha u, \qquad = (x_1, \dots, \mathbf{x}\, x_n),\ n \geqslant 1, \tag{4.24'}$$

știind că această soluție verifică atît condițiile inițiale (Cauchy)

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_{t=0} = f_0(\mathbf{x}),\ \frac{\partial u(t, \mathbf{x})}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_1(\mathbf{x}),\ \dots,\ \frac{\partial^{q-1} u(t, \mathbf{x})}{\partial t^{q-1}}\Big|_{t=0} =$$

$$= f_{q-1}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in D_n \tag{4.25}$$

cît și condițiile la limită

$$\mathbf{B}u(t, \mathbf{x})|_{\partial D_n} = \mathbf{g}(t, \ \mathbf{x}),\ t \geqslant 0. \tag{4.26}$$

Funcțiile $F, f_0, \dots, f_{q-1}$, $\mathbf{g}$, care se numesc *datele problemei* în studiu, se presupun cunoscute, avînd proprietăți convenabile (pentru ca toate calculele care vor fi efectuate să fie valabile) și fiind definite fie în $\mathbb{R}_+ \times D_n$(în cazul funcțiilor F și g) fie în D_n(în cazul funcțiilor $f_0, \dots, f_{q-1}$); coeficienții $b_0, \dots, b_q$ se presupun constante cu $b_0 \neq 0$ iar coeficienții a_α sînt definiți pentru $\mathbf{x} \in D_n$ și au o clasă convenabilă (astfel încît să existe, de exemplu, operatorul formal adjunct P^+). Condițiile la limită (4.26) (care sînt scrise vectorial) pot fi, de exemplu, condițiile Dirichlet (4.21) sau orice alte condiții care conduc la determinarea unui sistem complet de funcții proprii pentru operatorul P definit prin (4.24').

Soluția căutată va fi obținută la capătul a patru etape succesive de lucru.

Etapa I determină soluția formală a ecuației (4.23) omogene, adică soluția ecuației cu derivate parțiale

$$\mathrm{L}u = \mathrm{P}u \tag{4.23'}$$

care verifică datele Cauchy (4.24) și condițiile la limită (4.26) omogene, adică

$$\mathbf{B}u(t, \ \mathbf{x})|_{x \in \partial D_n} = 0. \tag{2.46'}$$

Prin metoda separării variabilelor, soluția $u_0 = u_0(t, \mathbf{x})$ se caută sub forma

$$u_0(t, \mathbf{x}) = T(t)\, v(\mathbf{x}), \tag{4.27}$$

ceea ce conduce, după înlocuire în ecuația (4.23'), la egalitatea

$$\frac{\mathrm{L}T(t)}{T(t)} = \frac{\mathrm{P}v(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})} \tag{4.27'}$$

care nu este posibilă decît dacă $\left(\frac{\mathrm{L}T}{T}\right) = \text{const}$, $\left(\frac{\mathrm{P}v}{v}\right) = \text{const}$ (deoarece variabilele t și $\mathbf{x}$ fiind independente pentru $t = t_0 > 0$, t_0 fiind fixat, a se obține

$$\frac{\mathrm{P}v(\mathbf{x})}{v(\mathbf{x})} = \frac{(\mathrm{L}T)(t_0)}{T(t_0)} = \text{const}$$

iar pentru $x = x_0 \in D_n$ se găsește

$$\frac{\mathrm{L}T(t)}{T(t)} = \frac{(\mathrm{P}v)(\mathbf{x}_0)}{v(\mathbf{x}_0)} = \text{const.}$$

Egalitatea (4.27′) arată că aceste constante sînt egale și notînd-o cu λ, se obțin două ecuații : o ecuație diferențială de ordinul p avînd funcția necunoscută T,

$$\mathrm{L}T - \lambda T = 0, \tag{4.28}$$

și o ecuație cu derivate parțiale de ordinul k, pentru funcția necunoscută v,

$$\mathrm{P}v - \lambda v = 0. \tag{4.29}$$

În baza egalităților (4.26) și (4.27), deoarece

$$\mathbf{B}\, u(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B}[T(t)\, v(\mathbf{x})] = T(t)\, \mathbf{B}[v(\mathbf{x})],$$

condiția la limită (4.26) va fi verificată dacă

$$\mathbf{B}v(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}\in\partial D_n} = 0 \tag{4.26′}$$

[dacă se presupune $T(t) = 0$, $t \geqslant 0$, aceasta înseamnă din (4.27), $u_0 = 0$, ceea ce nu se poate lua în considerare deoarece nu se vor verifica condițiile inițiale (4.25), datele Cauchy nefiind toate nule; vom presupune operatorul diferențial P definit pe mulțimea $M \subset L_2(D_n)$, unde,

$$M = \{v \mid v \in C^k(D_n),\ \mathbf{B}v = 0\},$$

condițiile la limită (4.26′) fiind astfel date încît în M (sau în $\bar{M}$, închiderea lui M în raport cu metrica din $L_2(D_n)$ sau în raport cu o altă metrică) să existe un sistem complet de funcții proprii ai operatorului P. Deoarece $L_2(D_n)$ este un spațiu separabil, rezultă că funcțiile proprii vor determina un șir (v_j) ortonormal din M[condiția $v_j \not\equiv 0$ este esențială, deoarece dacă $v_j = 0$, din (4.27) se obține din nou $u_0 = 0$]. Așadar, se face ipoteza că ecuația cu derivate parțiale $\mathrm{P}v = \lambda v$ admite în M (sau în $\bar{M}$) soluții nebanale numai dacă $\lambda_j = \lambda$, la fiecare λ_j corespunzînd un număr finit de soluții nenule (altfel s-ar contrazice separabilitatea lui L_2) care formează un șir

ortonormal complet în $L_2(D_n)$. Rezultă că în (4.27) funcțiile v sînt determinate iar funcțiile $T = T(t)$ se vor obține prin integrarea ecuației diferențiale (4.28) în care însă $\lambda = \lambda_j$, ceea ce înseamnă că

$$T_j(t) = c_{1j}T_{1j}(t) + \ldots + c_{qj}T_{qj}(t) = \sum_{i=1}^{q} c_{ij}T_{ij}(t), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{4.28′}$$

unde $T_{1j}, \ldots, T_{qj}$ formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială

$$b_0T^{(q)} + b_1T^{(q-1)} + \ldots + b_{q-1}T' + (b_q - \lambda_j)\, T = 0. \tag{4.28″}$$

Reunind aceste rezultate, se deduce că dacă ipotezele făcute anterior sînt verificate, se poate obține o infinitate numărabilă de soluții particulare ale ecuației cu derivate parțiale (4.23′) care verifică datele la limită omogene (4.26′) și anume :

$$u_{0j}(t, \mathbf{x}) = T_j(t)\, v_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{q} c_{ij}T_{ij}(t)\, v_j(\mathbf{x}) \tag{4.30}$$

(cu observația că funcția proprie v_j nu este în mod obligatoriu unic determinată, valorii proprii λ_j putîndu-i corespunde un număr finit de funcții proprii, ceea ce implică considerarea în (4.30) a tuturor acestor funcții proprii și, deci, coeficientul T_j corespunzător își va modifica coeficienții c_{ij}. Deoarece ecuația (4.23′) este liniară și omogenă, soluția acestei ecuații se va obține însumînd toate soluțiile particulare (4.30) :

$$u_0(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} u_0(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t)\, v_j(\mathbf{x}). \tag{4.31}$$

Formal, funcția (4.31) verifică atît ecuația omogenă (4.23′), cît și condițiile la limită omogene (4.26′); vom avea

$$(\mathrm{L} - \mathrm{P})u_0 = (\mathrm{L} - \mathrm{P}) \sum_{j=1}^{\infty} u_{0j}(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathrm{L} - \mathrm{P})u_{0j}(t, \mathbf{x}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{L} - \mathrm{P})(T_jv_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (v_j\mathrm{L}T_j - T_j\mathrm{P}v_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_jv_jT_j - \lambda_jT_jv_j) = 0,$$

$$\mathbf{B}u_0|_{\mathbf{x}\in\partial D_n} = \mathbf{B}\left[\sum_{j=1}^{\infty} u_{0j}(t, \mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}\in\partial D_n} = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t)\, \mathbf{B}v_j(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}\in\partial D_n} = 0$$

[calculele fiind formale deoarece nu este demonstrată nici convergența seriei (4.31) nici posibilitatea permutării operațiilor L—P și **B** cu operația de însumare]; pentru a obține soluția etapei I mai trebuie verificate condițiile inițiale (4.25). Combinînd (4.31) cu (4.25), se obțin (iarăși formal) egalitățile

$$\sum_{j=1}^{\infty} T_j(0)\, v_j(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x}), \sum_{j=1}^{\infty} T'(0)\; v_j(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}), \ldots$$

$$\ldots, \sum_{j=1}^{\infty} T^{(q-1)}(0)\, v_j(\mathbf{x}) = f_{q-1}(\mathbf{x}),$$

din care, în baza completitudinii șirului ortonormal (v_j) de funcții proprii se deduc următoarele egalități:

$$T_j(0)=(f_0, v_j)_0,\ T_j'(0)=(f_1, v_j)_0,\ \ldots,\ T_j^{(q-1)}(0)=(f_{q-1}, v_j)_0,\ j=1,\ 2,\ \ldots,$$

care combinate cu relațiile (4.28′) care definesc funcțiile T_j conduc la determinarea în mod unic a tuturor constantelor $c_{1j}, \ldots, c_{qj}$ (deoarece soluțiile particulare $T_{1j}, T_{2j}, \ldots, T_{qj}$ formează un sistem fundamental).

În concluzie, se poate afirma că soluția formală a primei etape este unic determinată.

Etapa a II-a (*principiul lui Duhamel*) determină soluția (formală) a ecuației (4.23) care verifică condițiile inițiale (4.25) omogene, adică

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial u\,(t, \mathbf{x})}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \ldots, \frac{\partial^{q-1} u(t, \mathbf{x})}{\partial t^{q-1}}\Big|_{t=0} = 0 \qquad (4.25')$$

și condițiile la limită omogene (4.26′); notînd cu u_p această soluție, principiul lui Duhamel afirmă că

$$u_p(t, \mathbf{x}) = \int_0^t v(t - s, s, \mathbf{x})\, \mathrm{d}s, \qquad (4.32)$$

unde $v = v(t, s, \mathbf{x})$ este soluție a ecuației omogene pentru orice $s \geqslant 0$, adică

$$\mathrm{L}v(t, s, \mathbf{x}) - \mathrm{P}v(t, s, \mathbf{x}) = 0, \qquad s \in \mathbb{R},$$

care verifică, în raport cu $\mathbf{x} \in \partial D_n$, condițiile la limită omogene (4.26′) și condițiile inițiale

$$v(t, s, \mathbf{x})\Big|_{t=0} = 0, \ldots, \frac{\partial^{q-2} v(t, s, \mathbf{x})}{\partial t^{q-2}}\Big|_{t=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^{q-1} v(t, s, \mathbf{x})}{\partial t^{q-1}}\Big|_{t=0} = \frac{1}{b_0} F(s, \mathbf{x}), \qquad (4.25'')$$

unde b_0 este coeficientul derivatei de ordin maxim din expresia operatorului diferențial L definit prin (4.24) iar F este termenul liber (factorul perturbator) al ecuației (4.23). Dacă se arată că funcția u_p definită prin (4.32) verifică toate condițiile cerute, cu aceasta etapa a doua este terminată. Or, derivînd în raport cu parametrul t, din (4.32) se deduce succesiv

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial v(t-s, s, \mathbf{x})}{\partial t}\,\mathrm{d}s + v(t - s, s, \mathbf{x})\Big|_{s=t} = \int_0^t \frac{\partial v(t - s, s, \mathbf{x})}{\partial t}\,\mathrm{d}s,$$

deoarece $v(t - s, s, \mathbf{x})|_{s=t} = v(0, t, \mathbf{x}) = 0$, în baza primei condiții (4.25′);

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v(t - s, s, \mathbf{x})}{\partial t^2}\,\mathrm{d}s + \frac{\partial v(t - s, s, \mathbf{x})}{\partial t}\Big|_{s=t} =$$

$$= \int_0^t \frac{\partial^2 v(t - s, s, \mathbf{x})}{\partial t^2}\,\mathrm{d}s$$

pentru că $\dfrac{\partial v\,(t - s, s, \mathbf{x})}{\partial t}\Big|_{t=s} = 0$, în baza celei de-a doua condiții (4.25′). Continuînd în același mod, se deduc egalitățile

$$\frac{\partial^3 u_p(t, \mathbf{x})}{\partial t^3} = \int_0^t \frac{\partial^3 v(t - s, s, \mathbf{x})}{\partial t^3}\,\mathrm{d}s,$$

. . . .

$$\frac{\partial^{q-1} u_p(t, \mathbf{x})}{\partial t^{q-1}} = \int_0^t \frac{\partial^{q-1} v(t - s, s, \mathbf{x})}{\partial t^{q-1}}\,\mathrm{d}s$$

din care rezultă că pentru $t = 0$ se vor verifica condiţiile iniţiale (4.25'); derivînd ultima egalitate încă o dată în raport cu t, găsim

$$\frac{\partial^q u_p(t, \mathbf{x})}{\partial t^q} = \int_0^t \frac{\partial^q v(t-s, s, \mathbf{x})}{\partial t^q} \, ds + \frac{\partial^{q-1} v(t-s, s, \mathbf{x})}{\partial t^{q-1}} \bigg|_{s=t} =$$

$$= \int_0^t \frac{\partial^q v(t-s, s, \mathbf{x})}{\partial t^q} \, ds + \frac{1}{b_0} F(t, \mathbf{x}),$$

deoarece, în virtutea ultimei condiţii (4.25''), rezultă

$$\frac{\partial^{q-1}(t-s, s, \mathbf{x})}{\partial t^{q-1}} \bigg|_{s=t} = \frac{1}{b_0} F(s, \mathbf{x}) \bigg|_{s=t} = \frac{1}{b_0} F(t, \mathbf{x}).$$

Calculînd $(\mathrm{L} - \mathrm{P}) u_p(t, \mathbf{x})$, se obţine

$$(\mathrm{L} - \mathrm{P})\, u_p(t, \mathbf{x}) = \int_0^t (\mathrm{L} - \mathrm{P})\, v(t-s, s, \mathbf{x}) \, ds + F(t, \mathbf{x}) = F(t, \mathbf{x}),$$

deoarece $\dfrac{\partial^m v(t-s, s, \mathbf{x})}{\partial t^m} = \dfrac{\partial^m v(t-s, s, \mathbf{x})}{\partial (t-s)^m}$ iar $(\mathrm{L} - \mathrm{P})v = 0$ şi cum $\mathbf{B}$ este un operator liniar, avem

$$\mathbf{B}u_p \bigg|_{\partial D_n} = \mathbf{B}\left[\int_0^t v(t-s, s, \mathbf{x}) \, ds\right]_{\mathbf{x} \in \partial D_n} =$$

$$= \int_0^t \mathbf{B}v(t-s, s, \mathbf{x}) \bigg|_{\mathbf{x} \in \partial D_n} ds = 0$$

în baza ipotezelor pentru v.

În baza consideraţiilor din etapa I, vom avea

$$v(t, s, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j^*(t, s)\, v_j(\mathbf{x}),$$

unde $T_j^*(t, s)$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$b_0 T^{(q)} + \ldots + b_{q-1} T' + (b_q - \lambda_j)\, T = 0,$$

care verifică condiţiile iniţiale

$$T_j(0) = 0,\ T_j'(0) = 0, \ldots, T^{(q-2)}(0) = 0,\ T_j^{(q-1)}(0) = \left(\frac{1}{b_0} F(s, \mathbf{x}),\ v_j(\mathbf{x})\right)_0 =$$

$$= \frac{1}{b_0} \int_{D_n} F(s, \mathbf{x}) v_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

şi, deci, din (4.32) se deduce o altă formă pentru u_p:

$$u_p(t, \mathbf{x}) = \int_0^t \left[\sum_{j=1}^{\infty} T_j^*(t-s, s)\, v_j(\mathbf{x})\right] ds =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t T_j^*(t-s, s)\, v_j(\mathbf{x}) \, ds. \tag{4.34}$$

Etapa a III-a determină soluţia (formală) a ecuaţiei (4.23) care verifică condiţiile iniţiale (4.25) şi condiţiie la limită omogene (4.26'); utilizînd rezultatele deduse în etapele I şi a II-a, dacă se notează prin $U = U(t, \mathbf{x})$ această soluţie, vom avea

$$U = u_0 + u_p, \tag{4.33}$$

u_0 fiind definit prin (4.31) iar u_p, prin (4.32). Se verifică uşor condiţiile pe care trebuie să le satisfacă U.

Etapa a IV-a determină soluţia (formală) finală a probemei studiate; pentru aceasta este suficient să se indice un procedeu prin care soluţia ecuaţiei (4.23) care verifică datele Cauchy (4.25) şi condiţiile la limită (4.26) se poate reduce la o problemă echivalentă, dar care se verifice condiţiile la limită omogene (şi deci să putem aplica etapa a III-a de calcul a soluţiei); or pentru aceasta este suficient să se determine o aplicaţie G definită pe $\mathbb{R}_+ \times D_n$, de o clasă convenabilă (cel puţin de clasă C^q în raport cu t şi de clasă C^k în raport cu $\mathbf{x}$) cu proprietatea $\mathbf{B}G = \mathbf{g}$. În această ipoteză, cu schimbarea de funcţie necunoscută $u = U + G$, se deduce imediat că U va fi obţinută prin metodele etapei a III-a, deoarece din ipotezele pentru u, se constată că U va verifica ecuaţia

$$(\mathrm{L} - \mathrm{P})\, \mathrm{U} = F - (\mathrm{L} - \mathrm{P})\, G,$$

condițiile inițiale

$$U\Big|_{t=0} = f_0 - G\Big|_{t=0} = f_0^*,\quad \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_1 - \frac{\partial G}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_1^*,\ \ldots$$

$$\ldots,\ \frac{\partial^{q-1} U}{\partial t^{q-1}}\Big|_{t=0} = f_{q-1} - \frac{\partial^{q-1} G}{\partial t^{q-1}}\Big|_{t=0} = f_{q-1}^*$$

(iar $f_0^*, \ldots, f_{q-1}^*$ vor fi evident cunoscute) și condițiile la limită omogene

$$\mathbf{B}U = \mathbf{B}u - \mathbf{B}G = \mathbf{g} - \mathbf{g} = 0.$$

O b s e r v a ț i i .1. Etapa I poate fi aplicată fără nici o modificare chiar dacă în operatorul liniar L se înlocuiesc coeficienții constanți $b_0, b_1, \ldots, b_q$ prin funcțiile $b_0(t)$, $b_1(t), \ldots, b_q(t)$, definite și continue pentru $t \geqslant 0$, iar $b_0(t) \neq 0$.

2. Etapa a II-a, denumită principiul lui Duhamel, nu este altceva decît o variantă a metodei variației constantelor, utilizată la determinarea soluției particulare pentru ecuațiile diferenițiale liniare și neomogene; la funcția u_p definită prin (4.32') se poate ajunge presupunîndu-o de forma

$$u_p(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t)\, v_j(x),$$

n care funcțiile T_j sînt definite de (4.28') dar cu $c_1 = c_1(t), \ldots, c_q = x_q(t)$, funcțiile $c_1(t), \ldots, c_q(t)$ determinîndu-se astfel încît să se verifice condițiile impuse lui u_p. Principiul lui Duhamel nu este aplicabil dacă $b_j = b_j(t)$, $j = 0, 1, \ldots, q$.

4.4. Serii trigonometrice și aplicații

4.4.1. Condiții la limită periodice

Vom considera problema determinării funcțiilor și valorilor proprii ale operatorului $\mathrm{P} = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$, definit pe mulțimea funcțiilor de clasă $C^2([a, b])$, $b - a < \infty$, care verifică pentru $x = a$ și $x = b$ condițiile la limită periodice, adică $f(x) = f(b)$ și $f'(a) = f'(b)$. Această problemă, după cum vom vedea, are numeroase aplicații practice importante și posedă particularitatea că poate fi rezolvată pe cale directă, deoarece, scriind ecuația care definește funcțiile și valorile proprii $\mathrm{P}y = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$, se obține ecuația diferențială cu coeficienți constanți

$$y'' - \lambda y = 0,$$

care, avînd soluția generală de forma

$$y(x) = c_1 \exp(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \exp(-\sqrt{\lambda} x),\quad \lambda \neq 0,$$

$$y(x) = c_1 x + c_2,\qquad \lambda = 0,$$

vor fi verificate condițiile la limită

$$y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b)$$

numai dacă

$$y(x) = c_2,\quad \lambda = 0,$$

sau, pentru $\lambda \neq 0$, dacă se determină c_1 și c_2 astfel încît să fie satisfăcut sistemul algebric liniar

$$c_1[\exp(\sqrt{\lambda} a) - \exp(\sqrt{\lambda} b)] + c_2[\exp(-\sqrt{\lambda}\, a) - \exp(-\sqrt{\lambda}\, b)] = 0,$$

$$c_1[\exp(\sqrt{\lambda} a) - \exp(\sqrt{\lambda} b)] + c_2[-\exp(-\sqrt{\lambda} a) + \exp(-\sqrt{\lambda} b)] = 0,$$

deoarece $|c_1| + |c_2| > 0$ [astfel s-ar obține soluția $y(x) = 0$ care nu poate fi funcție proprie]. Acest sistem va admite soluții nebanale numai dacă determinantul său este nul, adică dacă

$$\mathrm{ch}[\sqrt{\lambda}\,(b - a)] = 1\,;$$

or ecuația ch $t = 1$ este echivalentă cu ecuația $e^t = 1$ și cum t poate fi și număr complex [s-a presupus $\lambda \in \mathbb{R}$, deci $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{C}$, iar aici $t = (b - a)\sqrt{\lambda}$], vom avea $1 = \exp(2k\pi \mathrm{i})$, $k \in \mathbb{Z}$, ceea ce înseamnă $t = (b - a)\sqrt{\lambda} = 2k\pi\mathrm{i}$, adică $\lambda = -\dfrac{4k^2\pi^2}{(b - a)^2}$. Rezultă că vor exista soluții nebanale ale ecuației $y'' - \lambda y = 0$ care satisfac condițiile la limită periodice $y(a) = y(b)$ și $y'(a) = y'(b)$ numai dacă

$$\lambda = \lambda_k = -\frac{4\pi^2}{(b - a)^2} k^2,\quad k \in \mathbb{Z},$$

ceea ce înseamnă că aceste numere sînt chiar valorile proprii ale problemei considerate care formează o mulțime discretă (numărabilă).

Înlocuind în sistemul care determină pe c_1 și c_2, $\sqrt{\lambda}$ prin $\frac{2k\pi i}{b-a}$, sau, ceea ce este același lucru, punînd în ecuația $y'' - \lambda y = 0$, $\lambda = -\frac{4k^2\pi^2}{(b-a)^2}$, se deduc funcțiile proprii

$$y_0(x) = c_0, \qquad k = 0,$$

$$y_{k1}(x) = c_k \cos\left[\frac{2k\pi}{b-a}(x-a)\right], y_{k2}(x) = c_k' \sin\left[\frac{2k\pi}{b-a}(x-a)\right],$$

$$k = 1, 2 \ldots$$

Rezultă, exceptînd valoarea proprie $\lambda_0 = 0$, al cărei ordin de multiplicitate este egal cu unu, că valorile proprii λ_k, $k \in \mathbb{N}$, au ordinul de multiplicitate egal cu doi; o proprietate importantă a acestor funcții proprii este proprietatea de ortogonalitate cu pondere $\rho(x) = 1$, pe intervalul $[a, b]$, deoarece se verifică ușor că în notațiile

$$f_1(x) = c_0,\ f_{2k+1}(x) = y_{k1}(x) = c_k \cos\left[\frac{2k\pi}{b-a}(x-a)\right],$$

$$f_{2k}(x) = y_{k2}(x) = c_k' \sin\left[\frac{2k\pi}{b-a}(x-a)\right], \quad k \in \mathbb{N},$$

pentru șirul (f_n) din $C([a, b])$, avem

$$(f_n, f_m)_0 = \int_a^b f_n(x) f_m(x)\, \mathrm{d}x = 0, \qquad \text{dacă } n \neq m.$$

Presupunînd

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{b-a}}, c_k = c_k' = \sqrt{\frac{2}{b-a}}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

șirul (g_n), definit prin

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}, g_2(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos\left[\frac{2k\pi}{b-a}(x-a)\right],$$

$$g_{2k}(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left[\frac{2k\pi}{b-a}(x-a)\right], \quad k \in \mathbb{N}, \qquad (4.34)$$

va fi ortonormal în $C([a, b])$; pentru a evita unele dificultăți legate de forma mai complicată a șirului (4.34), se consideră intervalul canonic $[0, 2\pi]$ sau $[-\pi, +\pi]$ cînd se va obține șirul ortonormal trigonometric clasic

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, g_{2k+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx), g_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \ k \in \mathbb{N}.$$

$$(4.34'')$$

4.4.2. Definirea seriilor trigonometrice

Prin serie trigonometrică se înțelege o serie de forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (4.35)$$

unde $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ sînt numere reale sau complexe, numite *coeficienții seriei trigonometrice*; din definiție, rezultă o legătură între seria trigonometrică (4.35) și șirul trigonometric (4.34′), dar nu este obligatoriu ca seria trigonometrică să fie seria Fourier atașată șirului trigonometric (4.34′). Într-adevăr, în baza celor expuse în vol. I, cap. 15, pentru orice șir ortonormal dat într-un spațiu prehilbertian, seria pătratelor coeficienților Fourier este neapărat convergentă și de aceea, de exemplu, seriile

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots$$

$$\frac{\sin 2x}{\ln 2} + \frac{\sin 3x}{\ln 3} + \frac{\sin 4x}{\ln 4} + \ldots,$$

deși sînt serii trigonometrice, nu pot fi serii Fourier. În acest mod o serie trigonometrică poate fi convergentă (așa cum este cea a doua serie fără ca să fie o serie Fourier.

Datorită faptului că șirul trigonometric (4.34′) este un șir ortonormal pe intervalul $[-\pi, +\pi]$, cu pondere $\rho(x) = 1$, va rezulta că o serie trigonometrică va fi o dezvoltare în serie de funcții orto-

gonale; notînd cu $s_n = s_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, sumele parțiale ale seriei (4.35), adică

$$s_n(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (4.35')$$

în baza proprietăți de ortogonalitate a șirului trigonometric, calculînd produsele scalare $(s_n, \cos kx)$ și $(s_n, \sin kx)$, găsim

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} s_n(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} s_n(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4.36)$$

Dacă în plus șirul (s_n) este convergent (în medie sau uniform) către funcția f (continuă sau integrabilă, cu pătratul integral), prin trecere la limită, deoarece $s_n \to f$ și este posibilă trecerea la limită (pentru $n \to \infty$) sub semnul integral, în (4.36) se obțin egalitățile

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (4.36')$$

care arată că în ipotezele făcute pentru f, coeficienții trigonometrici vor coincide cu coeficienții Fourier ai șirului trigonometric, ceea ce face ca o astfel de serie trigonometrică să fie un caz particular de serie Fourier, ipoteză valabilă în viitor, ceea ce conduce la verificarea inegalității Bessel, care se va scrie

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x) \, dx \qquad (4.37)$$

$\left[\text{în ipoteza că } f \text{ are valori reale iar } \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)\,dx < \infty\right]$. Ipotezele curente asupra lui f sînt: fie funcție continuă pe porțiuni în $[-\pi, \pi]$

acest interval poate fi scris ca o reuniune finită de subintervale, în fiecare dintre acestea f fiind continuă și avînd limitele laterale finite) fie netedă pe porțiuni (adică

$$[-\pi, \pi] = \bigcup_{j=0}^{q} [x_j, x_{j+1}], \; x_0 = -\pi, \; x_{q+1} = +\pi,$$

f' fiind continuă în fiecare interval $]x_j, x_{j+1}[$ și avînd, ca și f, limite finite în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_{q+1}$); deci f admite în $]-\pi, +\pi[$ un număr finit de discontinuități de tip salt și în punctele de salt f este *standardizată*, adică ia valorile

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)], \qquad (4.37')$$

unde $f(x_0+) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$, $f(x_0-) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$.

Faptul că serie trigonometrică (4.35) are coeficienții definiți prin intermediul funcției f cu ajutorul egalităților (4.36') se va scrie

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (4.35'')$$

unde $f(x)$ este definit prin (4.37'); de aici se deduce că deși inițial $f(x)$ este definită numai pentru $x \in [-\pi, \pi]$, deoarece seria (4.35) este construită cu ajutorul unor funcții periodice cu perioada 2π (avem $\cos[n(x + 2\pi)] = \cos(nx)$ și $\sin[n(x + 2\pi)] = \sin(nx)$, $x \in \mathbb{R}$), este normal să se presupună f definită prin periodicitate, cu perioada 2π, pe toată mulțimea $\mathbb{R}$, punîndu-se

$$f(x) = \tilde{f}(x + 2k\pi), \; -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \; k \in \mathbb{Z},$$

dacă $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este prelungirea prin periodicitate, cu perioada 2π, a funcției f.

O proprietate importantă a funcțiilor periodice cu perioada 2π este dată de egalitatea

$$\int_{a}^{a+2\pi} f(x) \, dx = \int_{0}^{2\pi} f(x) \, dx, \; a \in \mathbb{R}, \qquad (4.38)$$

care se deduce scriind

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx,$$

efectuînd schimbarea de variabilă $x = t + 2\pi$ în ultima integrală şi ţinînd seama de periodicitatea, cu perioadă 2π a funcţiei f.

Din (4.38), pentru $a = -\pi$, se obţine

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx,$$

ceea ce arată că în formulele (4.36′) integralele pot fi calculate şi pe intervalul $[0, 2\pi]$ sau pe orice alt interval de lungime 2π.

O formă mai simetrică a seriilor trigonometrice este *forma complexă* a acestora care se obţine înlocuind funcţiile sinus şi cosinus prin formulele lui Euler; astfel:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)\,e^{inx} + (a_n + ib_n)\,e^{-inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

notîndu-se

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0,\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Dacă se au în vedere egalităţile (4.36′), găsim

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,(\cos nt - i \sin nt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,e^{int}dt,\quad c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt,$$

care arată că este suficient să definim doar coeficientul c_n, $n \in \mathbb{Z}$, prin

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,\text{cis}\,(-nt)\,dt; \tag{4.39}$$

seria trigonometrică, sub formă complexă, ataşată lui f, va fi

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\text{cis}\,(nx) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \tag{4.39′}$$

fiind deci o serie bilaterală. Reciproc, dacă c_n din (4.39′) sînt definiţi cu ajutorul formulelor (4.39), atunci din (4.39′) se deduce seria (4.39).

În calculul coeficienţilor unei serii triginometrice pot interveni simplificări, dacă f este funcţie pară sau impară; astfel, dacă $f(-x) = f(x)$, $x \in [-\pi, +\pi[$, deci dacă f este o funcţie pară, ţinînd seama de paritatea, respectiv imparitatea funcţiilor cos şi sin, din (4.36′) se obţin:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt,\quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\sin nt\,dt = 0,\qquad n = 1, 2, \ldots,$$

iar seria trigonometrică (4.35) nu va conţine nici o funcţie sin nx:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,\ x \in [0, \pi[,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx. \tag{4.40}$$

Dacă însă f este funcţie impară, deci $f(-x) = -f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, se deduce

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \in [0, \pi[,\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{4.40′}$$

Pînă acum, vorbind despre seriile trigonometrice, s-au presupus funcţiile definite pe intervalul $[-\pi, +\pi[$ şi prelungite apoi la întreg $\mathbb{R}$, prin periodicizare cu perioada 2π; acest interval, sau orice alt interval de lungime 2π (frecvent se utilizează intervalul $[0, 2\pi[$) poate

fi considerat un interval canonic. Toate considerațiile anterioare se pot repeta pentru orice alt interval $[a, b]$ de lungime finită ; ne convingem de aceasta cu ajutorul schimbării de variabilă $t = \frac{\pi}{b-a} \times$ $\times (2x-a-b)$, care aplică, bijectiv, intervalul $[a, b]$ pe intervalul $[-\pi, \pi]$. Practic însă, cel mai convenabil este să se lucreze cu intervalul de forma $[-l, +l]$ care are avantajul că este simetric față de $x=0$ $(l>0)$

Efectuînd schimbarea de variabilă $t = \frac{\pi}{l} x$, se poate defini funcția g astfel :

$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = g(t) = g\left(\frac{\pi}{l} x\right)$$

cu $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$, dacă $-l \leqslant x \leqslant +l$, și, prin urmare,

$$g(t) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),\ t \in [-\pi, +\pi[, \tag{4.41}$$

unde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(t) \cos bt\, \mathrm{d}t,\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(t) \sin nt\, \mathrm{d}t\,; \tag{4.42}$$

revenind la variabila x, în locul seriei trigonometrice (4.41) apare seria

$$g\left(\frac{\pi}{l} x\right) = f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)\right],$$

$$x \in [-l, +l[, \tag{4.41'}$$

ai cărei coeficienți se calculează cu ajutorul lui f, prin

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x,\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x, \tag{4.42'}$$

după cum ne convingem imediat scriind $\frac{\pi}{l} x$ în loc de t în integralele (4.42).

Prin analogie, forma complexă a dezvoltării (4.41') va fi

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(x) \operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{Z}, \tag{4.43}$$

iar dezvoltările trigonometrice de funcții cosinus vor avea forma

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right),\ x \in [0, l],$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{4.43'}$$

pe cînd dezvoltările în funcții sinus vor fi

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad x \in [0, l],$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.43''}$$

4.4.3. Convergența seriilor trigonometrice în intervalul $[-\pi, +\pi]$.

Utilizînd teorema lui Weierstrass de aproximare uniformă a funcțiilor continue pe $[-\pi, +\pi]$ prin polinoame trigonometrice, înțelegînd prin polinom trigonometric de grad n funcția

$$t_n(x) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx),\ |\alpha_n| + |\beta_n| > 0,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate determina $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$|f(x) - t_n(x)| < \varepsilon,\ x \in [-\pi, \pi],\ n \geqslant \mathbb{N}.$$

Dacă $f \in C([-\pi, \pi])$, se deduce imediat că șirul (s_n) al sumelor parțiale ale seriei trigonometrice (4.35) converge către f. Într-adevăr,

deoarece

$$\|f-s_n\|_0^2=\int_{-\pi}^{+\pi}|f(x)-s_n(x)|^2\,dx\leqslant\int_{-\pi}^{+\pi}|f(x)-t_n(x)|^2\,dx$$

(folosind faptul că eroarea medie pătratică este minimă cînd $\alpha_j = a_j$ și $\beta_j = b_j$), se deduce

$$\|f-s_n\|_0\leqslant\sqrt{2\pi}\,\varepsilon,\qquad n\geqslant N(\varepsilon).$$

Pe de altă parte, notînd cu $C_*([-\pi, +\pi])$ mulțimea funcțiilor continue pe porțiuni pe intervalul $[-\pi, \pi]$, un alt rezultat din teoria aproximării afirmă că dacă $f\in C_*([-\pi, \pi])$ va exista $f_1\in C([-\pi, \pi])$ astfel încît $\|f-f_1\|_0<\varepsilon$, ceea ce înseamnă că dacă f este continuă pe porțiuni pe intervalul $[-\pi, \pi]$, seria trigonometrică corespunzătoare va converge în medie către f (deoarece

$$\|f-s_n\|_0\leqslant\|f-f_1\|_0+\|f_1-s_n\|_0\leqslant\|f-f_1\|_0+\|f_1-s_n^{(1)}\|_0,$$

unde $(s_n^{(1)})$ este șirul sumelor parțiale pentru f_1, ceea ce arată că $\|f-s_n\|_0<\varepsilon$, $n>N$).

Așadar, o serie trigonomeetrică converge în norma din spațiul prehilbertian $H=C_*([-\pi, +\pi])$, deci

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\tag{4.44}$$

înțelegînd prin aceasta faptul că pentru orice $\varepsilon>0$, se poate determina $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{R}_+$, astfel încît

$$\left\|f(x)-\left[\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]\right\|<\varepsilon$$

îndată ce $n\geqslant N$; aici $\|f\|=\sqrt{(f,f)_0}$ iar $(f,g)_0=\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\,g(x)\,dx$.

Deoarece spațiul $C_*([-\pi, \pi])$ este dens în spațiul Hilbert $L_2([-\pi, \pi])$, se deduce convergența în medie către $f\in L_2$ a seriei trigonometrice corespunzătoare; în plus, este valabilă și egalitatea lui Parseval

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,dx.\tag{4.44'}$$

Următorul rezultat se referă la convergența uniformă a seriilor trigonometrice :

Teorema 4.3. *Dacă seria numerică*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)\tag{4.45}$$

este convergentă, atunci seria trigonometrică (4.44) *va fi uniform convergentă în intervalul* $[-\pi, \pi]$ *către* f.

⌈ Notînd cu $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șirul sumelor parțiale corespunzătoare seriei (4.44)

$$s_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\tag{4.45'}$$

pentru $m>n$, se deduce

$$|s_m(x)-s_n(x)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}(|a_k|\cos kx|+$$

$$+|b_k||\sin kx|)\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|);$$

dacă se notează prin σ_n sumele parțiale ale seriei (4.45), avem

$$\sigma_m-\sigma_n=\sum_{k=n+1}^{m}(|a_k|+|b_k|),\quad m>n,$$

și în baza convergenței seriei (4.45), pentru orice $\varepsilon>0$, se găsește $N=N(\varepsilon)$, astfel încît $\sigma_m-\sigma_n<\varepsilon$ dacă $m>n\geqslant N$. De aici se deduce că pentru orice $x\in[-\pi, +\pi]$

$$|s_m(x)-s_n(x)|<\varepsilon,\qquad\text{dacă}\quad m>n\geqslant N,$$

adică șirul $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ este uniform convergent, deci

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=f(x).$$

Teorema 4.3 nu este aplicabilă decît dacă se cunosc coeficienţii trigonometrici a_n şi b_n ai funcţiei f care se dezvoltă în serie Fourier; din inegalitatea lui Bessel nu se deduce convengenţa seriei (4.45) ci a seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ şi de aceea trebuie găsite criterii de convergenţă uniformă care să nu facă apel la coeficienţii dezvoltării Fourier ci la proprietăţile lui f, lucru ce va fi realizat mai tîrziu.

Vom presupune $f \in C_*([-\pi, \pi])$ iar în punctele de salt f este standardizată, deci dacă $x \in]-\pi, +\pi[$ este un punct de salt pentru f, prin definiţie

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]. \tag{4.46}$$

Utilizînd egalităţile (4.36') care definesc coeficienţii trigonometrici a_n şi b_n, suma parţială $s_n(x)$ va putea fi scrisă sub o formă integrală simplă şi anume

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\,\mathscr{D}_n(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4.47}$$

unde $\mathscr{D}_n$ este nucleul lui Dirichlet definit prin

$$\mathscr{D}_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{x}{2}},\ x\in[-\pi,+\pi]. \tag{4.47'}$$

Înainte de a deduce egalitatea (4.47), vom stabili cîteva proprietăţi al nucleului lui Dirichlet.

Teorema 4.4. *Funcţia* $\mathscr{D}_n$ *definită prin* (4.47') *este o funcţie pară, periodică, cu perioada* 2π, *definită pe* $\mathbb{R}$, *verificînd*

$$\int_0^{\pi}\mathscr{D}_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\mathscr{D}_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot \tag{4.47''}$$

┌ Deoarece $\mathscr{D}_n$ este o sumă de cosinusuri, care sînt funcţii pare, periodice cu perioada 2π, $\mathscr{D}_n$ are aceleaşi proprietăţi, ultima egalitate din (4.47') obţinîndu-se fie prin însumare (utilizînd formulele lui Euler) fie prin inducţie; egalitatea (4.47'') se obţine direct prin calcul. ┘

Trecînd la egalitatea (4.47) şi folosind formulele (4.36') pentru coeficienţi, avem

$$s_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kx\cos kt+\sin kx\sin kt)\right]\mathrm{d}t=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\,\mathscr{D}_n(t-x)\,\mathrm{d}t;$$

cu schimbarea de variabilă $t-x\to t$, utilizînd periodicitatea produsului $f\cdot\mathscr{D}_n$, se obţine

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(t+x)\,\mathscr{D}_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t+x)\,\mathscr{D}_n(t)\,\mathrm{d}t=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(t+x)\,\mathscr{D}_n(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t+x)\,\mathscr{D}_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

iar (4.47) se va obţine prin transformarea $t\to -t$ în prima integrală.

Egalitatea (4.47) permite transcrierea sub formă integrală a diferenţei

$$s_n(x)-f(x)=s_n(x)-\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)],$$

dacă se foloseşte (4.47''); vom avea pentru $x\in[-\pi,\pi]$.

$$s_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\,\mathscr{D}_n(t)\,\mathrm{d}t-$$
$$-\frac{1}{\pi}[f(x+)+f(x-)]\int_0^{\pi}\mathscr{D}_n(t)\,\mathrm{d}t=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)-f(x+)]\,\mathscr{D}_n(t)\,\mathrm{d}t+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x-t)-f(x-)]\,\mathscr{D}_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Teorema 4.5. *Dacă* $f: \mathbb{R} - \mathbb{R}$ *este netedă pe porțiuni, periodică cu perioada* 2π *și standardizată, atunci seria trigonometrică* (4.35), *în care coeficienții sînt definiți prin* (4.35), *converge către* $f(x)$ *în orice punct* $x \in \mathbb{R}$.

⌐ Este suficient să arătăm că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $s_n(x) - f(x) \to$ $\to$ cînd $n \to \infty$; or deoarece

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x+)]\, \mathcal{D}_n(t)\mathrm{d}t +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x-t) - f(x-)]\, \mathcal{D}_n(t)\, \mathrm{d}t,$$

notînd

$$g_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x+)]\, \mathcal{D}_n(t)\, \mathrm{d}t,$$

$$h_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x-t) - f(x-)]\, \mathcal{D}_n(t)\, \mathrm{d}t,$$

va fi suficient să arătăm că g_n și h_n tind la zero cînd $n \to \infty$. Avem

$$g_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right] \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{[f(x+t) - f(x+)}{2\sin\frac{t}{2}} \cos\frac{t}{2}\right] \sin(n\,t)\, \mathrm{d}t +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+)}{2} \cos(nt)\, \mathrm{d}t$$

și deci g_n în punctul x poate fi considerat ca fiind suma a doi coeficienți Fourier: unul obținut prin dezvoltarea în serie de sinusuri a funcției $\dfrac{f(x+t) - f(x+)}{4\sin\frac{t}{2}} \cos\dfrac{t}{2}$ iar celălalt provine din dezvoltarea în serie de cosinusuri a funcției $\dfrac{f(x+t) - f(x+)}{4}$; cum ambele aceste funcții sînt netede pe porțiuni, exceptînd eventual prima funcție pentru $t = 0$, inegalitatea lui Bessel asigură convergența la zero a acestor coeficienți (într-o serie convergentă termenul general tinde la zero). Dacă $t = 0$, regula lui l'Hospital arată că

$$\left.\frac{f(x+t) - f(x+)}{4\sin\frac{t}{2}} \cos\frac{t}{2}\right|_{t=0+} = -\frac{1}{2} f'(x-),$$

deci funcția va fi netedă pe porțiuni pentru orice t. Pentru demonstrația faptului că $h_n(x) \to 0$, cînd $n \to \infty$, se utilizează aceeași argumentație. ⌟

Așadar, în cazul funcției $f(x) = 0$, $-\pi \leqslant x < 0$, $f(x) = 1$, $0 \leqslant x < \pi$ în baza acestei teoreme, seria Fourier trigonometrică

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin[(2k-1)x]$$

va converge către zero în fiecare punct $x \in \,]-\pi, 0[\, + 2j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$, către unu în fiecare punct $x \in \,]0, \pi[\, + 2j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$, și va converge către $\frac{1}{2}$ dacă $x = j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$.

Teorema 4.5 constituie un criteriu practic eficace în studiul convergenței seriilor trigonometrice iar demonstrația ei s-a bazat pe convergența către zero a coeficienților a_n și b_n; de aceea comportarea acestor coeficienți prezintă o importanță deosebită. Va fi valabilă

Teorema 4.6. a) (*Lema Riemann-Lebesgue*). *Dacă* $|f|$ *este integrabil în intervalul* $[-\pi, +\pi]$, *atunci* $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ *cînd* $n \to \infty$;

b) *dacă* f *este netedă pe porțiuni în* $[-\pi, +\pi]$, *atunci* $|a_n| \leqslant \dfrac{M}{n}$, $|b_n| \leqslant \dfrac{M}{n}$, *cu* M *independent de* n;

c) *dacă* $f \in C^{s-2}([-\pi, +\pi])$ *iar* $f^{(s-1)}$ *este netedă pe porțiuni, atunci* $|a_n| \leqslant \dfrac{M}{n^s}$, $|b_n| \leqslant \dfrac{M}{n^s}$, , *cu* M *independent de* n.

⌐ a) Fie m număr real pozitiv și fie $f_m: [-\pi, +\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pentru } |f(x)| \leqslant m, \\ 0 & \text{pentru } |f(x)| > m, \end{cases}$$

În baza proprietăților integralelor improprii, pentru orice $\varepsilon > 0$, se poate determina m suficient de mare, astfel încît

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x) - f_m(x)| dx < \varepsilon.$$

Utilizînd definiția lui a_n, se poate scrie

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x) - f_m(x)|\, dx + \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{+\pi} f_m(x) \cos mx\, dx\right| < \frac{1}{\pi}\cdot 2\varepsilon,$$

deoarece, funcția f fiind mărginită, avem

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f_m^2(x)\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} |f_m(x)| \cdot |f_m(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant m\int_{-\pi}^{+\pi} |f_m(x)|\, dx \leqslant m\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|\, dx < \infty$$

și deci inegalitatea lui Bessel asigură convergența la zero a coeficienților seriei trigonometrice pentru f_m. Un raționament analog va fi valabil pentru coeficienții b_n.

b) Dacă $-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = +\pi$ sînt punctele de salt ale lui f, scriind

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos (nx)\, dx = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{p-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \cos (nx)\, dx$$

și integrînd prin părți, se deduce

$$a_n = \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{p-1}\left[\frac{1}{n} f(x) \sin (nx)\right]\Bigg|_{x_j}^{x_{j+1}} - \frac{1}{n}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x) \sin (nx)\, dx$$

și cum funcțiile f și f' sînt mărginite, inegalitățile în cauză sînt justificate.

c) se deduce iterînd demonstrația de la punctul b. ┘

Teorema 4.8 (*criteriul lui Dini*). *Dacă f este standardizată, periodică cu perioada 2π și astfel încît*

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}\right| dt < \infty, \quad \int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{f(x-t)-f(x-)}{t}\right| dt<\infty, \quad (4.48)$$

deci integralele respective sînt finite pentru $x \in \mathbb{R}$, atunci seria trigonometrică converge către $f(x)$.

┌ Demonstrația se bazează pe punctul a) al teoremei 4.6 și pe demonstrația teoremei 4.5, arătînd că funcțiile g_n și h_n tind la zero; or, deoarece

$$\frac{f(x+t)-f(x+)}{\sin\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2} = \frac{f(x+t)-f(x+)}{t}\,\frac{t\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}},$$

ținînd seamă de mărginirea funcției $\dfrac{t}{\sin\frac{t}{2}}$, în baza ipotezelor (4.48) și a lemei Riemann-Liebesgue, se deduce $g_n \to 0$. ┘

Condițiile lui Dini (4.48) sînt dificil de verificat; or se vede că dacă f are derivată mărginită, deoarece

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}\right| dt \leqslant 2\pi\,\|f'_0\|,$$

acestea vor fi verificate. De asemenea (4.48) sînt verificate dacă f este hölderiană, adică

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant H|x_1 - x_2|^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha \leqslant 1, \qquad H > 0,$$

pentru orice $x_1,\ x_2 \in [-\pi, \pi]$, deoarece

$$\left|\frac{f(x+t)-f(x+)}{t}\right| \leqslant H|t|^{\alpha-1}$$

iar $\int_{-\pi}^{+\pi} |t|^{\alpha-1} dt < \infty$, dacă $\alpha > 0$.

4.4.4. Derivarea și integrarea termen cu termen a seriilor trigonometrice

O importanță practică specială prezintă posibilitatea derivării sau a integrării termen cu termen a seriilor trigonometrice și vom demonstra două rezultate în acest sens.

Teorema 4.8. *Dacă f este continuă şi periodică cu perioada* 2π *iar* f' *este netedă pe porţiuni şi standardizată, atunci :*

a) *seria obţinută prin derivare termen cu termen a seriei trigonometrice pentru f converge către* $f'(x)$ *în orice punct* $x \in \mathbb{R}$;

b) *seria trigonometrică pentru f converge uniform în orice subinterval din* $\mathbb{R}$.

⌈ a) Dacă scriem

$$f'(x) = \frac{1}{2} a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos nx + b_n' \sin nx), \tag{4.49}$$

teorema 4.5 asigură convergenţa către $f(x)$, în orice punct $x \in \mathbb{R}$, a acestei serii; dacă $x_0, x_1, \ldots, x_p$ sînt punctele de salt pentru f', $-\pi = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = \pi$, avem :

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{p-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{p-1}[f(x_{j+1})\cos(nx_{j+1}) - f(x_j)\cos(nx_j)] +$$

$$+ \frac{n}{\pi}\sum_{j=0}^{p-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx = nb_n,$$

$$b_n' = -n\,a_n,$$

dacă se ţine seama de continuitatea lui f. Aşadar, din (4.49) se deduce

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(n\,b_n\cos nx - n\,a_n\sin nx) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}a_0\right)' + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

adică seria trigonometrică pentru f' se va obţine din seria trigonometrică pentru f prin derivare termen cu termen.

b) Utilizînd punctul c) din teorema 4.6, avem $|a_n| \leqslant \frac{M}{n^2}$, $|b_n| \leqslant \frac{M}{n^2}$, ceea ce înseamnă că seria convergentă $2M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ va fi o serie majorantă pentru seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

ceea ce antrenează uniform convergenţa acestei serii. ⌋

De exemplu, deoarece seria trigonometrică pentru $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi[$, va f

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,$$

prin derivare termen cu termen se va obţine seria trigonometrică pentru $f'(x) = 2x$, $-\pi < x < \pi$; se deduce

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx.$$

Teorema 4.8 poate fi utilizată pentru obţinerea unor informaţii în legătură cu integrarea termen cu termen a seriilor trigonometrice; în primul rînd, se observă că dacă $a_0 \neq 0$, integrînd termen cu termen o serie trigonometrică, se obţine o serie care nu este trigonometrică, datorită termenului a_0x. De aceea, vom presupune $a_0 = 0$ iar dacă $a_0 \neq 0$, vom considera funcţia $f(x) - \frac{1}{2}a_0$ în locul lui f.

Teorema 4.9. *Dacă f este netedă pe porţiuni, periodică cu perioada* 2π *şi astfel încît* $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, *atunci seria trigonometrică a funcţiei* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definită prin*

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx + B_n\sin nx),$$

se obține integrînd termen cu termen seria trigonometrică pentru f, exceptînd termenul constant A_0 care este dat prin

$$-A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} xf(x)\,dx.$$

⌈ Ipotezele teoremei 4.8 pentru F se verifică. De exemplu, condiția de periodicitate, cu perioada 2π, se obține din $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$:

$$F(x+2\pi) = \int_{-\pi}^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \int_{\pi}^{x+2\pi} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{\pi}^{x+2\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{x} f(s)\,ds,\ s = t - 2\pi.$$

Deci dezvoltarea Fourier pentru f se obține derivînd termen cu termen seria trigonometrică pentru F (deoarece $F' = f$). Pentru a găsi coeficientul A_0, avem (efectuînd inversarea ordinii de integrare)

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt\right]dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\int_{t}^{\pi} f(t)\,dx\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\int_{t}^{\pi} dx\right]f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(\pi - t)\,f(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,f(t)\,dt = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} tf(t)\,dt.$$ ⌋

De exemplu, dacă f se obține prin periodicizarea și standardizarea funcției

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } -\pi \leqslant x < 0, \\ +1 & \text{pentru } 0 \leqslant x < \pi, \end{cases}$$

se constată ușor că

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt = -\pi + |x|;$$

deoarece f este funcție impară iar $\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin\ nx\ dx = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$, seria trigonometrică pentru f va fi

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin[(2k-1)x].$$

Cu ajutorul teoremei 4.9. se obține, integrînd termen cu termen, seria trigonometrică pentru funcția $-\pi + |x|$:

$$-\pi + |x| = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos[(2k-1)x].$$

Din această dezvoltare în serie se obține imediat seria trigonometrică pentru $|x|$.

4.5. Seriile trigonometrice și integrarea ecuațiilor

4.5.1. Soluții periodice pentru ecuații diferențiale

Fie

$$y'' + ay' + by = f(x),\quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{4.50}$$

o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți în care termenul liber este o funcție periodică, avînd perioada 2π; ne interesează posibilitatea existenței unei soluții periodice, cu perioada 2π a acestei ecuații. Pentru aceasta, să presupunem soluția y scrisă sub forma

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \tag{4.51}$$

în care $c_n \in \mathbb{C}$ trebuie determinați astfel încît să se verifice ecuația (4.50); funcția y din (4.51) va fi periodică, cu perioada 2π și seria se transformă într-o serie trigonometrică reală dacă

$$c_{-n} = \bar{c}_n. \tag{4.51'}$$

Presupunînd $y'' \in C^1_*$, se obțin y' și y'' prin derivare termen cu termen (prin aplicarea succesivă a teoremei 4.6) :

$$y' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} in\,c_n e^{inx},\quad y'' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(in)^2 c_n e^{inx}$$

iar prin înlocuire în (4.50) se obține egalitatea

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n[(in)^2 + a(in) + b]\, e^{inx} = f(x),$$

care arată că dacă notăm cu $p(r) = r^2 + ar + b$ polinomul caracteristic al ecuației (4.50), coeficienții dezvoltării în serie trigonometrică $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n e^{inx}$ a funcției f, trebuie să fie egali, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, cu

$$c'_n = c_n[(in)^2 + a(in) + b]. \qquad (4.51'')$$

Cum c'_n sînt cunoscuți

$$c'_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-int}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

avem posibilitatea determinării coeficienților c_n ai soluției (4.51):

$$c_n = \frac{c'_n}{(in)^2 + a(in) + b}, \quad n \in \mathbb{Z}, \; c_{-n} = \bar{c}_n, \qquad (4.51''')$$

evident, în ipoteza $p(in) \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Așadar, soluția căutată, dacă există, va avea forma

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c'_n}{p(in)}\, e^{inx}, \quad c'_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-int} dt. \qquad (4.52)$$

Așadar, problema pusă va admite soluții și acestea vor avea forma (4.52), dacă $p(in) \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$; este ușor de verificat convergența seriei (4.52) în ipoteza absolut convergenței seriei trigonometrice pentru f. Într-adevăr, cum $p(0) \neq 0$, se poate presupune $|p(0)| \geqslant c > 0$ iar deoarece $p(r) = r^2 + ar + b$ este un polinom de gradul doi, pentru $n = 0$ să avem $|p(in)| \geqslant c|n|^2$. Va rezulta

$$\left|\frac{c'_n}{p(in)}\right| \leqslant \frac{|c'_n|}{cn^2}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

și deci seriile $\sum_{-\infty}^{+\infty} c'_n$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} nc'_n$, $\sum_{-\infty}^{+\infty} n^2 c'_n$ sînt absolut convergente, ceea

ce antrenează posibilitatea derivării termen cu termen a seriei (4.51).

Prin urmare, dacă funcția f, periodică cu perioada 2π, are coeficienții Fourier c'_n, $n \in \mathbb{Z}$, astfel încît seria $\sum_{-\infty}^{+\infty} c'_n$ este absolut convergentă (ceea ce se întîmplă dacă f este continuă și netedă pe porțiuni), atunci dacă $-n^2 + ian + b \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, ecuația diferențială (4.50) admite o singură soluție periodică, avînd perioada 2π.

Dacă existența soluției este confirmată prin seria (4.52), unicitatea acesteia se justifică, presupunînd existența a două soluții periodice y_1 și y_2 ale ecuației (4.50); atunci diferența $y = y_1 - y_2$ va verifica ecuația omogenă $y'' + ay' + by = 0$. Cum soluțiile nenule ale acestei ecuații sînt periodice numai dacă sînt de forma $\sin kx$, $\cos ks$, deci numai dacă ecuația caracteristică $r^2 + ar + b = 0$ admite soluții de forma $r = ik$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, ceea ce este exclus prin ipoteză, rămîne ca singură soluție periodică $y(x) = 0$, $x \in 0$, $x \in [-\pi, +\pi]$, deci $y_1(x) = y_2(x)$, $x \in [-\pi, +\pi]$. Dacă însă $p(ik) = 0$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, atunci din (4.51'') se deduce $c'_{k_0} = 0$ și deci va exista o soluție periodică, cu perioada 2π, a ecuației (4.50) dacă și numai dacă $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, e^{-ikx} dx = 0$, pentru $k_0 \in Z$, verificînd ecuația $-k^2 + iak + b = 0$; cu alte cuvinte, termenul liber f nu poate fi arbitrar iar dacă f verifică aceste condiții, care se mai pot scrie și sub forma

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\, dx = 0,$$

deci sînt condiții de ortogonalitate pe soluțiile ecuației omogene corespunzătoare ecuației (4.50), soluția (4.52) va fi periodică, avînd perioada egală cu 2π, dar nu va fi unic determinată [deoarece, din (4.51'') se deduce c_{k_0} arbitrar].

Aceleași considerații sînt valabile și pentru ecuația liniară cu coeficienți constanți de ordinul $m > 2$:

$$a_0 y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + \ldots + a_{m-1} y' + a_m y = f(x),$$

dacă f este periodică, avînd perioada 2π, continuă și netedă pe porțiuni, cu condiția să presupunem polinomul p din calculele anterioare înlocuit prin polinomul caracteristic corespunzător.

$$p(r) = a_0 r^m + a_1 r^{m-1} + \ldots + a_{m-1} r + a_m.$$

4.5.2. Probleme mixte pentru ecuaţia căldurii

Una din ecuaţiile fundamentale ale practicii este ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t, x), \quad a \in \mathbb{R}, \tag{4.53}$$

cunoscută sub numele de *ecuaţia căldurii*, deoarece apare în studiul conductibilităţii termice precum şi în alte procese de difuzie; de exemplu, dacă se consideră o bază metalică omogenă avînd lungimea l, a cărei suprafaţă laterală este izolată termic, şi dacă se notează $u = u(t, x)$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, temperatura barei la momentul t în secţiunea de abscisă x (presupunînd axa Ox astfel dispusă încît un capăt al barei este plasat în origine iar celălalt are abscisa $x = l$), atunci u verifică ecuaţia (4.53). Constanta a^2 se numeşte *difuzivitate termică* a barei în cauză şi depinde numai de materialul din care este alcătuită bara iar termenul liber (sau factorul perturbator) $F = F(t, x)$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, apare numai dacă în bară există surse de căldură (sau de răcire).

Din punct de vedere matematic, ne interesează soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale (4.53); este însă evident, că nu avem nevoie de orice soluţie a acestei ecuaţii, ci numai de soluţia care va corespunde fenomenul fizic care conduce la ecuaţia în cauză. Orice fenomen de propagare a căldurii într-o bară pretinde însă să ştim ce se întîmplă în bară atît la momentul iniţial (care este $t = 0$) cît şi la capetele $x = 0$ şi $x = l$ ale barei; dacă $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, este temperatura iniţială a barei iar $g_1(t)$ şi $g_2(t)$ sînt temperaturile barei la cele două capete ($x = 0$, respectiv $x = l$), ecuaţiei (4.53) vor trebui ataşate condiţiile suplimentare

$$u(t, x)|_{t=0} = u(0, x) = f(x), \tag{4.54}$$

$$\left.\begin{aligned} u(t, x)|_{x=0} &= u(t, 0) = g_1(t) \\ u(t, x)|_{x=l} &= u(t, l) = g_2(t) \end{aligned}\right\}, \quad t \geqslant 0. \tag{4.55}$$

Prin urmare, va trebui să rezolvăm următoarea problemă: să găsim acea soluţie a ecuaţiei (4.53) care verifică în plus condiţiile suplimentare (4.54) şi (4.55); această problemă se numeşte *prima problemă mixtă* pentru ecuaţia căldurii.

Vom considera şi relaţiile omogene corespunzătoare lui (4.55), (4.54), şi (4.55):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4.53'}$$

$$u(t, x)|_{t=0} = 0, \tag{4.54'}$$

$$\left.\begin{aligned} u(t, x)|_{x=0} &= 0 \\ u(t, x)|_{x=l} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{4.55'}$$

Comparînd cu metoda generală expusă în 4.3, se deduce

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad Pu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(t, x), \quad \mathbf{B}u = [u(t, 0),\ u(t, l)]^t$$

iar soluţia căutată va fi complet determinată dacă se găsesc funcţiile şi valorile proprii pentru problema la limită

$$v'' - \lambda v = 0, \quad v(0) = 0, \quad v(l) = 0;$$

or calcule complet asemănătoare celor din 4.4.1 arată că valorile proprii sînt

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

iar funcţiile proprii (nenormate) vor fi

$$v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Prin urmare, soluţia ecuaţiei căldurii omogene (4.53') va fi

$$u_0(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{a^2\pi^2k^2}{l^2}t} \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right), \tag{4.56}$$

deoarece ecuaţia diferenţială $LT - \lambda_k T = 0$ fiind $T' + \frac{k^2\pi^2a^2}{l^2} T = 0$, admite soluţia generală $T_k(t) = a_k \exp\left(-\frac{a^2\pi^2k^2}{l^2} t\right), k \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$;

şirul de constante (a_k) se determină cu ajutorul condiţiei iniţiale (4.54), adică din egalitatea

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = f(x), \quad x \in [0, l].$$

Deoarece f este definită pentru $x \in [0, l]$, utilizînd teoria seriilor trigonometrice, prelungind prin imparitate această funcţie (deci presupunînd $f:[-l, +l] \to \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$, $x \in [0, l]$), rezultă

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi) \sin\left(\frac{k\pi}{l}\xi\right) \mathrm{d}\xi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Introducînd aceşti coeficienţi în expresia lui u_0 şi notînd

$$G(t, x, \xi) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2\pi^2k^2}{l^2}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l}\xi\right), \tag{4.57}$$

se obţine expresia sub formă integrală pentru această soluţie:

$$u_0(t, x) = \int_0^l G(t, x, \xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{4.56'}$$

Funcţia: $G: [0, +\infty[\times [0, l] \times [0, l] \to \mathbb{R}$ definită prin (4.57) poartă numele de *funcţia Green* pentru prima problemă mixtă ataşată ecuaţiei căldurii.

Utilizînd principiul lui Duhamel, soluţia ecuaţiei neomogene (4.53), care verifică condiţiile mixte nule, se poate scrie fie sub forma seriei:

$$u_p(t, x) = \int_0^t \left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_k(s) \exp\left[-\frac{a^2\pi^2k^2}{l^2}(t-s)\right] \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\right\} \mathrm{d}s$$

cu

$$a_k(s) = \frac{2}{l}\int_0^l F(s, \xi) \sin\left(\frac{k\pi}{l}\xi\right)\mathrm{d}\xi$$

sau sub formă integrală

$$u_p(t, x) = \int_0^t \left[\int_0^l G(t-s, x, \xi)\; F(s, \xi)\, \mathrm{d}\xi\right] \mathrm{d}s,$$

utilizînd funcţia Green; în acest mod, soluţia (formală) a ecuaţiei căldurii (4.53) care verifică condiţia iniţială (4.54) şi condiţiile la limită omogene va fi

$$U(t, x) = u_0(t, x) + u_p(t, x) = \tag{4.56''}$$
$$= \int_0^l G(t, x, \xi)\; f(\xi)\, \mathrm{d}x + \int_0^t \left[\int_0^l G(t-s, x, \xi)\; F(s, \xi)\, \mathrm{d}\xi\right] \mathrm{d}s$$

Soluţia finală se va scrie sub forma

$$u(t, x) = U(t, x) + g_1(t) + \frac{x}{l}[g_2(t) - g_1(t)] \tag{4.56'''}$$

în care U este soluţia (4.56'') în care f şi F s-au înlocuit prin $f(x) - g_1(0) - \frac{x}{l}[g_2(0) - g_1(0)]$, respectiv prin $F(t, x) - g_1'(t) - \frac{x}{l}[g_2'(t) - g_1'(t)]$ (cu ipoteza că g_1 şi g_2 sînt funcţii de clasă C^1 pentru $t \geqslant 0$), deoarece funcţia $G(t, x) = g_1(t) + \frac{x}{l}[g_2(t) - g_1(t)]$ verifică condiţiile la capete (4.55).

Exemple. 9. O bară de cupru (în care $a^2 = 1{,}14$ cm²/s), omogenă, avînd lungimea $l = 10$ cm şi izolată la suprafaţa laterală, este încălzită la temperatura de 100°C iar începînd cu momentul iniţial este scufundată într-o baie de gheaţă (deci capetele barei sînt menţinute permanent la temperatura de 0°C); se cere temperatura în secţiunile barei la momentul $t > 0$.

Soluţia se obţine prin particularizare în calculele anterioare: avem

$$a^2 = 1{,}14, \;\; l = 10, \;\; F = 0, \;\; f(x) = 100, \;\; g_1(t) = g_2(t) = 0,$$

ceea ce conduce la soluţia

$$u_0(t, x) = \frac{400}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{10}x\right]}{2k+1} \exp\left[-1{,}14(2k+1)^2\pi^2 t/100\right].$$

10. Se consideră o bară omogenă de aluminiu (pentru care $a^2 = 0{,}86$ cm²/s), avînd lungimea 2 cm, ale cărei laturi şi capete sînt izolate, astfel încît nu are loc transfer de căldură cu exteriorul; dacă temperatura iniţială a barei este $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, se cere temperatura barei în diverse secţiuni pentru $t > 0$.

Rezolvare. Dacă $u = u(t, x)$ este temperatura barei în secţiunea avînd abscisa x la momentul t, această funcţie va satisface ecuaţia $\frac{\partial u}{\partial t} = 0{,}86\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ şi condiţiile suplimentare

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = f(x), 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\Big|_{x=2} = 0.$$

Aplicînd metoda separării variabilelor, vor trebui găsite valorile şi funcţiile proprii ale problemei la limită

$$v'' - \lambda v = 0, \qquad v'(0) = 0, \qquad v'(2) = 0;$$

pe cale directă, integrînd ecuaţia diferenţială şi impunînd condiţiile suplimentare, rezultă

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{4}, \quad k = 0,1,\ldots,\ v_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right).$$

Cum ecuaţia diferenţială pentru funcţia $T = T(t)$ este

$$T' + \frac{k^2\pi^2a^2}{4}T = 0, \quad a^2 = 0{,}86,$$

rezultă soluţia

$$u(t, x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\left(-\frac{k^2\pi^2a^2}{4}t\right)\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right),$$

care va verifica condiţia iniţială dacă numerele reale $a_0, a_1, a_2, \ldots$ se vor deduce din egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2,$$

adică, utilizînd dezvoltările trigonometrice în serie de consinusuri,

$$a_k = \int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

ceea ce înseamnă

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^2 f(\xi)\cos\left(\frac{k\pi}{2}\xi\right)\mathrm{d}\xi\right]\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\exp\left(-\frac{a^2k^2\pi^2 t}{4}\right).$$

Se observă că pentru t mare, temperatura în bară diferă puţin de $\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$, cantitate care poate fi considerată media distribuţiei iniţiale a temperaturii în bară.

Convergenţa soluţiei formale (4.56‴) a primei probleme mixte pentru ecuaţia căldurii se poate stabili uşor datorită prezenţei termenului $\exp\left(-\frac{a^2\pi^2k^2}{l^2}t\right)$, ceea ce face ca soluţia în cauză să admită derivate parţiale de orice ordin în raport cu t şi x, pentru $0 < t \leqslant t_1$ şi $0 < x < l$, t_1 fiind un număr real pozitiv arbitrar. Într-adevăr, atît seria din (4.56), cît şi orice derivată parţială poate fi majorată prin serii numerice de forma $M\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}\exp\left(-\frac{a^2\pi^2k^2}{l^2}t\right)$, $\alpha \in \mathbb{N}$, care fiind convergente (se poate aplica, de exemplu, criteriul radicalului), antrenează uniform convergenţa în $]0, t_1[\times]0, l[$ a tuturor derivate-

lor parţiale. În acest mod, soluţia formală (4.56‴) devine o soluţie obişnuită; ulterior, în vol. III, se va arăta că această soluţie este singura posibilă.

4.5.3. Probleme mixte pentru ecuaţia coardei vibrante

O altă ecuaţie de bază a fizicii matematice este ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(t, x), \quad a \in \mathbb{R}, \tag{4.57}$$

care se numeşte *ecuaţia coardei vibrante* (sau *ecuaţia undelor unidimensională*) şi care apare în studiul undelor acustice, electromagnetice, vibraţiilor mediilor elastice. Astfel, de exemplu, dacă se consideră o coardă elastică omogenă, de lungime l, ale cărei oscilaţii au loc permanent în planul (x, u) atunci dacă $u = u(t, x)$ reprezintă deplasarea punctelor coardei faţă de poziţia de echilibru, măsurată în punctul de abscisă $x \in [0, l]$, la momentul $t > 0$, u va verifica ecuaţia (4.57) [în ipoteza că este vorba de oscilaţii mici în planul (x, u) iar punctul avînd abscisa x se deplasează numai paralel cu axa Ou]; constanta a^2 este egală cu $\frac{H}{\rho}$, H fiind componenta orizontală a tensiunii în coardă şi ρ este masa coardei raportată la unitatea de lungime iar F este rezultanta forţelor exterioare.

Din consideraţiile anterioare se deduce că, de regulă, soluţiile ecuaţiei (4.57) vor trebui să verifice şi condiţii suplimentare, deduse din problema practică luată în discuţie; astfel, dacă u reprezintă vibraţiile unei coarde elastice, omogene, fixate la capete, vom avea condiţiile la limită

$$u(t, 0) = 0, \qquad u(t, l) = 0 \tag{4.57'}$$

şi fiind cazul unei mişcări, mai trebuie avute în vedere şi condiţiile iniţiale (poziţia iniţială şi viteza iniţială a punctelor coardei), care vor fi

$$u(t, x)\big|_{t=0} = f(x), \quad \left.\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x). \tag{4.58}$$

Prin analogie cele expuse în 4.5.2, vom denumi *prima problemă mixtă* pentru ecuația coardei vibrante, determinarea soluțiilor ecuației (4.57) care verifică datele inițiale (4.58) și condițiile la limită

$$u(t, 0) = g_1(t), \quad u(t, l) = g_2(t) \tag{4.57''}$$

în ipoteza că datele problemei în studiu (adică funcțiile F, f, g, g_1 și g_2) sînt cunoscute.

Această problemă de asemenea se poate rezolva utilizînd metoda separării variabilelor; astfel, căutînd pentru ecuația omogenă

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.59}$$

soluții de forma $u(t, x) = T(t)\, X(x)$, se ajunge la ecuațiile diferențiale

$$X'' - \lambda X = 0, \quad T'' - \lambda a^2 T = 0$$

care trebuie verificate de către funcțiile X și T; presupunînd condițiile la limită (4.57′) se deduc condițiile $X(0) = 0$, $X(l) = 0$ în care trebuie integrată ecuația lui X. În baza celor deduse în 4.5.2, va trebui să presupunem

$$\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

(care reprezintă valorile proprii ale problemei) și deci

$$X(x) = X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

(funcțiile proprii ale problemei); din ecuația verificată de funcția T se deduce

$$T(t) = T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

și, prin urmare, funcțiile

$$u_n(t, x) = T_n(t)\, X_n(x) =$$

$$= \left[a_n \cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad n \in \mathbb{N},$$

vor fi soluții particulare ale ecuației (4.59) care verifică datele (4.57′). Prin însumare, se deduce funcția

$$u_0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{4.60}$$

care va fi soluția formală a problemei (4.59), (4.57′); impunînd condițiile inițiale (4.58), se vor obține

$$u_0(0, x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

$$\left.\frac{\partial u_0(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{an\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

ceea ce dă posibilitatea determinării șirurilor de constante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\mathrm{d}\xi, \quad b_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l g(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\mathrm{d}\xi, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.60'}$$

și deci soluția formală (4.60) este unic determinată.

Pentru ca soluția (4.60) a problemei (4.59), (4.58), (4.57′) să înceteze a fi formală, va fi suficient să presupunem seriile obținute prin două derivări succesive termen cu termen uniform convergente, ceea ce se poate deduce din convergența seriilor

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\, n^2$$

[dacă f și g din (4.58) sînt astfel încît f'' și g' sînt continue iar f''' și g'' continue pe porțiuni, aceste două serii sînt convergente; se mai poate face observația că din formulele (4.60′) pentru b_n apariția lui n la numitor, face să fie suficientă ipoteza ca g'' să fie continuă pe porțiuni].

Soluţia completă se va deduce imediat dacă se obţine o soluţie particulară u_p a ecuaţiei neomogene (4.57); această soluţie, care verifică în plus condiţiile iniţiale nule

$$u(t, x)|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{4.58'}$$

se va găsi uşor cu ajutorul principiului lui Duhamel:

$$u_p(t, x) = \int_0^t v(t - s, \; s, x)\, \mathrm{d}s \tag{4.61}$$

unde $v = v(t, s, x)$ verifică, pentru orice $s > 0$, ecuaţia (4.60), condiţiile la limită (4.57') şi condiţiile iniţiale particulare

$$v(t, s, x)|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v(t, s, x)}{\partial t}\right|_{t=0} = F(s, x); \tag{4.58''}$$

se obţine [din (4.60) şi 4.60')]:

$$v(t, s, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(s) \sin\left(\frac{an\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right),$$

$$b_n(s) = \frac{2}{an\pi} \int_0^l F(s, \xi) \sin\left(\frac{n\pi}{l} \xi\right) \mathrm{d}\xi.$$

Atunci $u(t, x) = u_0(t, x) + u_p(t, x)$ verifică ecuaţia (4.57) şi condiţiile (4.57') şi (4.58) iar prin procedeul din 4.5.2 orice problemă cu condiţii la limită neomogene [deci de forma (4.57'')] se reduce la o problemă cu condiţii la capete omogene (se presupun funcţiile g_1 şi g_2 cel puţin de clasă C^2 pentru $t \geqslant 0$).

Rezultatele obţinute rămîn valabile şi în cazul vibraţiilor longitudinale ale unei bare omogene avînd lungimea l; dacă se presupune axa Ox astfel dispusă încît baza este aşezată cu capetele în $x = 0$ şi $x = l$, atunci se poate arăta că dacă bara se întinde sau se comprimă, vibraţiile longitudinale care apar vor verifica ecuaţia (4.57) (în care $a^2 = E_0$, E fiind modulul de elasticitate al materialului din care este constituită bara).

Problemele rezolvate pînă acum presupuneau existenţa, alături de condiţiile iniţiale, a unor condiţii la capetele mediului studiat, condiţii care defineau **prima problemă la limită** ataşată ecuaţiilor

studiate; practic însă pot apărea şi alte tipuri de condiţii la limită Astfel, de exemplu, în cazul vibraţiilor longitudinale ale unei bare vor apărea condiţiile

$$u(t, 0) = 0, \qquad u(t, l) = 0,$$

dacă bara este fixată la ambele capete; dacă însă un capăt este fixat iar celălalt este liber, condiţiile anterioare vor fi înlocuite prin

$$u(t, 0) = 0, \qquad \left.\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0,$$

dacă este fixat capătul $x = 0$ şi şi este liber capătul $x = l$ [condiţia $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$ arată că variaţia alungirii barei pentru $x = l$ este nulă].

În cazul unei coarde vibrante pot apărea situaţii în care capetele ei sînt legate elastic, în care caz, la extremităţile ei, vor apărea condiţii de forma

$$\left[u(t, x) + k\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\right]_{x=0} = 0, \quad \left[u(t, x) + h\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\right]_{x=l} = 0,$$

$k, h \in \mathbb{R}$ fiind cunoscuţi.

Din calculele anterioare se deduce că soluţia formală a primei probleme mixte pentru ecuaţia coardei vibrante va fi o soluţie ordinară numai dacă se impun condiţii restrictive asupra condiţiilor iniţiale, condiţiilor la limită şi factorului perturbator. Să vedem mai în amănunt ce se întîmplă dacă aceste condiţii restrictive nu sînt îndeplinite; pentru concretizarea calculelor, să presupunem $f \in C^0([0, l])$, $g = 0$, $F = 0$, $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, ceea ce face ca soluţia să se scrie

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{an\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \tag{4.61'}$$

cu

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{l} \xi\right) \mathrm{d}\xi.$$

Dacă $f \in L^2([0, l])$ (adică dacă $\int_0^l f^2(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, seria trigonometrică $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$ va converge în medie către $f(x)$ iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

va fi convergentă; în aceste ipoteze, seria care definește soluția (4.61′) va fi și ea convergentă în medie (deci seria nu mai este formală dar nu va putea defini o soluție obișnuită a ecuației coardei vibrante, în orice domeniu $G_T = [0, l] \times [0, T] \subset \mathbb{R}^2$, cu $T > 0$ arbitrar. Într-adevăr, scriind sumele parțiale ale seriei (4.41′), adică

$$s_n(t, x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{ak\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right)$$

pentru $m > n$, un calcul simplu conduce la egalitățile

$$\|s_m(t, x) - s_n(t, x)\|_0^2 = \int_0^T \int_0^l \left[\sum_{k=n+1}^{m} a_k \cos\left(\frac{ak\pi}{l} t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{l} x\right)\right] dx\, dt =$$

$$= \frac{l}{2} \sum_{k=n+1}^{m} a_k^2 \int_0^T \cos^2\left(\frac{ak\pi}{l} t\right) dt \leqslant \frac{Tl}{2} \sum_{k=n+1}^{m} a_k^2,$$

deoarece $\cos^2 \alpha \leqslant 1$; în baza convergenței seriei $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2$, pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate găsi numărul natural N astfel încît

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k^2 < \frac{2\varepsilon^2}{Tl} \qquad \text{pentru } m > n \geqslant N,$$

ceea ce antrenează

$$\|s_m(t, x) - s_n(t, x)\|_0 < \varepsilon \text{ pentru } m > n \geqslant N;$$

prin urmare, putem scrie

$$u(t, x) = \lim_{n\to\infty} s_n(t, x)$$

și deoarece s_n este o soluție ordinară a ecuației coardei vibrante (fiind o sumă finită de soluții particulare a acestei ecuații), se va verifica egalitatea (vezi 4.1.3), v fiind funcție-test în G_T:

$$(s_n, \mathrm{P}v)_0 = 0,$$

unde

$$\mathrm{P}v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (s_n, \mathrm{P}v)_0 = \iint_{G_T} s_n(t, x)\, \mathrm{P}v(t, s)\, dt\, ds$$

(avem $\mathrm{P} = \mathrm{P}^+$), ceea ce arată că soluția (4.51′), deși nu este o soluție obișnuită (neavînd derivate de ordinul al doilea), trebuie considerată o soluție generalizată (soluție forte); deoarece din $\lim s_n = u$ se deduce

$$\lim (s_n, \mathrm{P}v)_0 = (\lim s_n, \mathrm{P}v)_0 = (u, \mathrm{P}v)_0,$$

trecerea la limită sub semnul integralei este posibilă în baza convergenței în medie a șirului (s_n).

Astfel noțiunea de soluție generalizată apare ca naturală și se observă că este legată în special de ecuația coardei vibrante; în cazul ecuației propagării căldurii soluția formală devine automat soluție ordinară.

Evident, toate considerațiile anterioare se extind cu ușurință și în cazul $g \neq 0$, $g_1 \neq 0$, $g_2 \neq 0$, $F \neq 0$, ținînd seama că în acest caz soluția se exprimă tot cu ajutorul unor serii de forma seriei (4.61′).

4.5.4. Interpretarea fizică a soluțiilor ecuației coardei

Forma (4.60) pentru soluțiile primei probleme mixte pentru ecuația coardei vibrante corespunde *vibrațiilor libere* (adică pentru $F = 0$) ale unei coarde fixate la capetele ei $x = 0$ și $x = l$; din această formă, adică

$$u_0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x), \tag{4.62}$$

unde

$$u_n(t, x) = \left[a_n \cos\left(\frac{an\pi}{l} t\right) + b_n \sin\left(\frac{an\pi}{l} t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

se observă că mișcarea coardei se compune din suprapunerea unor mișcări mai simple, $u_n = u_n(t, x)$, care se numesc *vibrații armonice*. Utilizînd notațiile

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \sin \varphi_n = \frac{a_n}{c_n}, \quad \cos \varphi_n = \frac{b_n}{c_n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

u_n se poate scrie sub forma

$$u_n(t, x) = c_n \sin\left(\frac{an\pi}{l} t + \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right),$$

din care se deduce că $u_n(t, x) = 0$ pentru orice $t > 0$ dacă x ia una din valorile $x = 0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \ldots, \frac{(n-1)l}{n}, l$; aceste puncte sînt fixe în cazul în care vibrațiile coardei sînt $u(t, x) = u_n(t, x)$ și se numesc *noduri* ale vibrației u_n. O coardă care vibrează după legea $u = u_n(t, x)$ se împarte în n porțiuni, avînd extremitățile fixe iar în porțiuni alăturate, oscilațiile coardei sînt în sensuri opuse; mijloacele acestor porțiuni vibrează cu amplitudinea maximă și se numesc *ventrele* sau *antinodurile* vibrației u_n. Tipul de vibrație descris de $u_n = u\,(t, x)$ se numește *undă staționară* iar soluția (4.62) este o suprapunere de unde staționare; așadar, metoda separării variabilelor aplicată ecuației coardei (4.57) arată că oscilațiile acesteia se compun dintr-o infinitate de moduri diferite de vibrații ale coardei.

Primul mod de oscilație ($n=1$), dat de prima undă staționară, arată că vibrațiile coardei în jurul poziției de echilibru se realizează cu frecvența

$$\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi a}{l} = \frac{a}{2l} \quad \text{cicluri pe secundă}$$

și va fi frecvența cea mai joasă, numită *frecvență fundamentală* sau *armonica întîi* a coardei; analog, al n-lea mod de vibrație are frecvența

$$\omega_n = \frac{1}{2\pi} \frac{n\pi a}{l} = n \frac{a}{2l} = n\omega_1 \text{ cicluri pe secundă}$$

și se numește *armonica a n-a* a coardei. Dacă în vibrația coardei se emit sunete, acestea vor fi note muzicale dacă u are frecvența un multiplu întreg al frecvenței fundamentale. În fig. 4.1 sînt reprezentate cîteva poziții succesive ale unei coarde care vibrează după legea $u = u_n(t, x)$ pentru $n = 1, 2, 3, 4$.

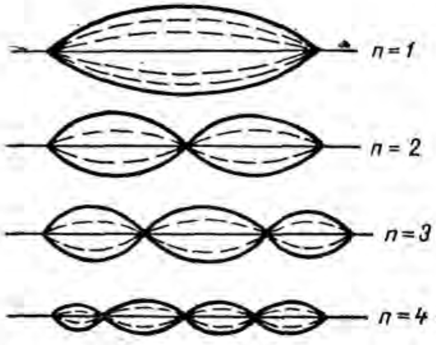

Fig. 4.1

Dacă în ecuația (4.57) se presupune $F \neq 0$, se spune că se iau în considerație *vibrații forțate* ale coardei (ele se datoresc nu numai condițiilor inițiale ci și forțelor exterioare care acționează asupra coardei).

Pentru a vedea ce se întîmplă în acest caz, vom considera cazul particular

$$F(t, x) = A \sin(\omega t), \quad A, \omega \in \mathbb{R},$$

adică factorul perturbator este periodic $\left(\text{cu perioada } \frac{2\pi}{\omega}\right)$ și vom lua în considerație doar contribuția lui F la mișcare (se presupune deci $f = g = 0$); aplicînd principiul lui Duhamel, se obține

$$u_p(t, x) = \frac{4}{\pi} A \sin(\omega t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left[\frac{(2k+1)\pi x}{l}\right]}{(2k+1)(\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)} -$$

$$- \frac{4}{\pi} A\omega \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\omega_{2k+1} t) \cdot \sin\left[\frac{(2k+1)\pi x}{l}\right]}{\omega_{2k+1}^2 (\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)},$$

dacă $\omega \neq \omega_{2k+1} = (2k+1)\,\omega_1, \omega_1 = \frac{a}{2l}$ sau

$$u_p(t, x) = \frac{2Al}{\pi^2 a} \cdot \frac{1}{(2k_0+1)^3} \sin^3\left[\frac{(2k_0+1)\pi a}{l} t\right] \sin\left[\frac{(2k_0+1)\pi}{l} x\right] -$$

$$- \frac{2Alt}{\pi^2 a} \cdot \frac{1}{(2k_2+1)^2} \cos\left[\frac{(2k_0+1)\pi a}{l} t\right] \sin\frac{(2k_0+1)\pi}{l} x\Big] +$$

$$+ \frac{Al}{\pi^2 a} \cdot \frac{1}{(2k_0+1)^3} \cos\left[\frac{(2k_0+1)\pi a}{l} t\right] \sin\left[\frac{2(2k_0+1)\pi a}{l} t\right] \times$$

$$\times \sin\left[\frac{(2k_0+1)\pi}{l} x\right] + u^*(t, x),$$

dacă $\omega = \omega_{2k_0+1}$, cu u^* de forma (4.62′) dar fără termenul în care $k = k_0$.

Din expresiile lui u_p se deduce că dacă ω este apropiat de ω_{2k+1} sau coincide cu ω_{2k_0+1}, această soluție va conține termeni care pot lua valori mari, ceea ce înseamnă că în mișcarea ei coarda vibrează cu amplitudini mari, ceea ce poate atrage ruperea ei; acesta este *fenomenul de rezonanță.*

4.5.5. Probleme la limită pentru ecuația lui Laplace

4.5.5.1. *Rezolvarea problemei Dirichlet pentru cerc.* Se consideră un cerc avînd raza $R > 0$, cu centrul în originea axelor; a rezolva *problema Dirichlet* (interioară) pentru cerc înseamnă a găsi o funcție $u = u(x, y)$, continuă pentru $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, de clasă C^2 pentru $x^2 + y^2 < R^2$, care verifică ecuația lui Laplace

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{4.63}$$

în orice punct din interiorul acestui cerc și care ia valori continue prescrise pe cerc

$$u(x, y)\,|_{x^2+y^2=R^2} = f. \tag{4.63'}$$

Cu ajutorul teoriei seriilor trigonometrice se poate demonstra existența soluției acestei probleme, soluția putînd fi scrisă sub următoarea formă integrală:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - x^2 - y^2)\, f(\xi, \eta)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}\, \mathrm{d}\varphi, \tag{4.64}$$

φ fiind unghiul format între axa Ox și segmentul care unește centrul cercului cu punctul (ξ, η) de pe cerc; în (4.64) avem $x^2 + y^2 < R^2$ și $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

Trecînd la sistemul polar de coordonate

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad 0 \leqslant r \leqslant R,\quad 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

în locul ecuației (4.63) trebuie considerată ecuația (vezi 3.4.4)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \tag{4.63'}$$

iar condiția la limită (4.63') se transcrie

$$u(r, \theta)|_{r=R} = u(R, \theta) = f_1(\theta) \quad [= f(R\cos\theta, R\sin\theta)], \tag{4.63''}$$

unde $f_1(\theta = f(R\cos\theta, R\sin\theta)$. Soluția căutată va fi de clasă C^2 pentru $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, și vom presupune u funcție periodică, cu perioada 2π (aceeași proprietate de periodicitate va fi valabilă și pentru funcția f). Separînd variabilele în ecuația (4.63'), punînd $u(r, \theta) = F(t)\, G(\theta)$, rezultă egalitatea

$$rG(\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r\, F'(r)] + F(r)G''(\theta) = 0,$$

din care se deduce o nouă egalitate

$$\frac{r}{F}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rF') = -\frac{G''}{G}$$

care este posibilă numai dacă

$$\frac{r}{F}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rF') = \lambda,\quad -\frac{G''}{G} = \lambda,\qquad \lambda \in \mathbb{R};$$

așadar, funcțiile F și G vor fi soluții ale ecuațiilor diferențiale

$$r^2F'' + rF' - \lambda F = 0,\qquad G'' + \lambda G = 0.$$

Ecuația diferențială pentru G va trebui să admită soluții periodice cu perioada 2π [deoarece din $u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta)$ se deduce $G(\theta + 2\pi) = G(\theta)$], ceea ce este posibil numai dacă $\lambda = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, cînd se vor obține soluțiile

$$G(\theta) = G_n(\theta) = a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta,\qquad n \in \mathbb{N},$$

$$G_0(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + b_0\theta,\qquad n = 0,$$

iar pentru periodicitate, neapărat $b_0 = 0$; pentru $\lambda = n^2$, ecuația lui F, fiind o ecuație Euler, va admite soluția generală

$$F(r) = F_n(r) = c_n r^n + d_n r^{-n},\qquad n \in \mathbb{N},$$

$$F_0(r) = c_0 + d_0 \ln r,\qquad n = 0.$$

Pentru ca produsul $F(r)\, G(\theta)$ să definească o funcție de clasă C^2 pentru $0 \leqslant r < R$, trebuie ca $d_0 = d_1 = \ldots = d_n = \ldots = 0$ (func-

țiile r^{-n} și ln r fiind discontinue în origine) iar fără a micșora generalitatea se poate presupune $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = \ldots = 1$ (în caz contrar aceste constante pot fi înglobate în constantele care apar în funcțiile G_n); așadar, pentru ecuația (4.63') se obțin soluțiile particulare

$$u_0(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0, \quad u_n(r, \theta) = r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)], \quad n \in \mathbb{N},$$

ceea ce conduce la soluția finală

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)], \quad (4.65)$$

unde șirurile de constante $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se vor determina cu ajutorul condiției la limită (4.63''):

$$u(R, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] = f_1(\theta).$$

Se obțin coeficienții

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos(n\varphi) \, d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin(n\varphi) \, d\varphi$$

iar, înlocuiți în soluția (4.64), conduc la

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos[n(\theta - \varphi)]\right] d\varphi, \quad (4.65')$$

inversarea ordinei de însumare cu operația de integrare fiind posibilă deoarece seria

$$S_1 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos[n(\theta - \varphi)] \quad (4.66)$$

este uniform convergentă, admițînd ca seria majorantă seria geometrică $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n, 0 \leqslant q = \frac{r}{R} < 1$; seria din (4.66) se poate însuma observînd că S_1 este partea reală a seriei geometrice

$$S = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r}{R} e^{i(\theta - \varphi)}\right]^n, \quad (4.66')$$

care este convergentă deoarece $\left|\frac{r}{R} e^{i(\theta-\varphi)}\right| = \frac{r}{R} < 1$. Se obține

$$S = \frac{R + r\, e^{i(\theta-\varphi)}}{R - r\, e^{i(\theta-\varphi)}},$$

de unde

$$S_1 = \operatorname{Re} S = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2R r \cos(\theta - \varphi)};$$

înlocuind în (4.65') se deduce soluția

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f_1(\varphi) \, d\varphi}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)}, \quad (4.65'')$$

care coincide cu (4.64), deoarece, conform cu teorema lui Pitagora generalizată, avem $R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) = (\xi - x)^2 + (\xi - y)^2$, $r^2 = x^2 + y^2$ dacă $\xi = R \cos \varphi$, $\eta = R \sin \varphi$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ iar $f_1(\varphi) = f(R \cos \varphi, R \sin \varphi)$.

4.5.5.2. *Rezolvarea problemei Neumann pentru cerc.* Prin *problemă Neumann* (interioară) pentru cerc se înțelege determinarea unei funcții $u = u(x, y) \in C^1(\bar{D}_2)$, unde D_2 este definit prin $x^2 + y^2 < R^2$, cunoscîndu-se valorile derivatei după normala pe frontiera lui D_2:

$$\left.\frac{\partial u(x, y)}{\partial \nu}\right|_{x^2+y^2=R^2} = g, \quad (4.67)$$

unde g este o funcție continuă (pe cercul $x^2 + y^2 = R^2$) iar u verifică ecuația (4.63) pentru $x^2 + y^2 < R^2$.

Utilizînd calculele din 4.5.5.1, prin introducerea coordonatelor polare, soluția va avea forma (4.65), cele două șiruri $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trebuind să fie obținute din condiția la frontieră (4.76); deoarece la un cerc derivata după direcția normalei coincide cu derivata după direcția razei, (4.67) se va scrie

$$\left.\frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r}\right|_{r=R} = g_1(\theta), \quad g_1(\theta) = g(R \cos \theta, R \sin \theta). \quad (4.67')$$

Din (4.65) prin derivare termen cu termen în raport cu r se obține seria trigonometrică

$$\sum_{n=1}^{\infty} n[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]r^{n-1}$$

care conduce, în baza lui (4.67′), la egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} n[a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]\, R^{n-1} = g_1(\theta)\,; \qquad (4.67'')$$

se observă că această serie trigonometrică are coeficienții

$$na_n R^{n-1},\ nb_n R^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

și deci este incompletă : lipsește termenul constant.

Prin urmare, se deduce că problema Neumann interioară pentru cerc nu va admite soluții decît pentru acele funcții continue, pentru care $\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\mathrm{d}\theta = 0$; dacă această condiție va fi îndeplinită, soluția se va obține înlocuind în (4.65) coeficienții $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prin

$$a_n = \frac{1}{\pi n R^{n-1}}\int_0^{2\pi} g_1(\varphi)\cos(n\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi n R^{n-1}}\int_0^{2\pi} g_1(\varphi)\sin(n\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \quad n \in \mathbb{N},$$

termenul liber $\frac{1}{2}a_0$ fiind arbitrar.

Prin urmare, o soluție pentru problema Neumann (interioară) pentru cerc se va scrie sub forma

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varphi)\left[2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\theta-\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi\,;$$

pentru a însuma seria de sub semnul integralei (permutarea celor două operații este posibilă din cauza convergenței uniforme a seriei), se face observația că dacă S_2 este seria

$$S_2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos[n(\theta-\varphi)],$$

atunci $\frac{\partial S_2}{\partial\theta} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \sin[n(\theta-\varphi)]$ și deci, comparînd cu (4.66′), se deduce

$$-\frac{\partial S_2}{\partial\theta} = \operatorname{Im} S = \frac{2rR\sin(\theta-\varphi)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi)}.$$

Prin integrare, se găsește

$$S_2 = \ln[R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi)],$$

ceea ce face ca soluția problemei Neumann (interioară) pentru cerc să fie

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\varphi)\ln[R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta-\varphi)]\,\mathrm{d}\varphi$$

în coordonate polare sau

$$u(x,y) = \frac{1}{2}a_0 + \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\xi,\eta)\ln[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]\,\mathrm{d}\varphi$$

în coordonate carteziene.

4.6. Funcțiile proprii și teoria polinoamelor ortonormale

4.6.1. Polinoamele Legendre ca funcții proprii

În exemplele concrete din 4.5 s-a constatat că este posibil să se determine o soluție a unei probleme date sub formă de serie, cu condiția să fie posibilă determinarea funcțiilor și valorilor proprii pentru un anumit operator diferențial ; aceste valori și funcții proprii s-au putut determina elementar, prin integrare directă. Este evident că dacă ecuația diferențială care definește funcțiile proprii nu poate fi integrată prin metodele cunoscute, nu este posibilă găsirea funcțiilor și valorilor proprii.

În baza teoriei polinoamelor ortogonale (vol. I, cap. 14) se poate rezolva problema determinării funcţiilor şi valorilor proprii pentru o nouă categorie de operatori diferenţiali, cu aplicaţii practice importante. Vom lua în consideraţie mai întîi operatorul diferenţial al lui Legendre

$$\mathrm{P}y = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)\,y']$$

definit pe mulţimea $C^2([-1,+1])$; funcţiile şi valorile proprii pentru acest operator vor fi obţinute ca soluţii ale ecuaţiei diferenţiale

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{4.68}$$

care se deduce din egalitatea $\mathrm{P}y = \lambda y$. Pentru ca funcţia proprie y să fie element al spaţiului de definiţie $C^2([-1,+1])$, va trebui să existe limitele finite $y(-1+)$ şi $y(1-)$, deoarece ecuaţia (4.68) admite punctele $x = \pm 1$ ca puncte singulare (ceea ce, în general, implică discontinuitatea soluţiilor în vecinătatea punctelor singulare); prin urmare, în cazul de faţă, în mod natural, condiţiile la limită vor fi

$$|y(-1+)| < \infty, \qquad |y(1-)| < \infty \tag{4.68'}$$

pe care le vom numi *condiţii la limită singulare*.

În baza teoriei din 14.3 (vol. I), problema la limită (4.68), (4.68') admite valorile proprii

$$\lambda_n = n(n+1), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.69}$$

funcţiile proprii fiind

$$y_n(x) = P_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

P_n fiind polinomul Legendre de gradul n, care se poate scrie

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n], \qquad n = 0, 1, \ldots;$$

într-adevăr, deoarece pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $|P_n(x)| < \infty$, cu atît mai mult se vor verifica datele (4.68') iar, evident, P_n nu este nul

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ iar a doua soluţie, liniar independentă de P_n, fiind proporţională cu

$$P_n(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)P_n^2(t)}, \qquad x_0 \in \mathbb{R},$$

nu poate fi finită în punctele $x = \pm 1$, integrala în cauză fiind divergentă.

În baza completitudinii şirului de polinoame Legendre, vom arăta că aceste funcţii şi valori proprii sînt singurele posibile pentru problema la limită (4.68), (4.68'); într-adevăr, dacă $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ar fi o valoare proprie diferită de $n(n+1)$, $n=0,1,2,\ldots$, notînd funcţia proprie corespunzătoare cu y_0, vor fi verificate egalităţile

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)y_0'(x)] = -\lambda_0 y_0(x), \qquad y_0(\pm 1) = \text{finit},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)P_n'(x)] = -n(n-1)\,P_n(x),\ P_n(\pm 1) = \text{finit}.$$

Înmulţind prima ecuaţie cu soluţia celeilalte şi, reciproc, prin scădere se obţine identitatea

$$y_0(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)\,P_n'(x)] - P_n(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)\,y_0'(x)] =$$

$$= [\lambda_0 - n(n+1)]\,y_0(x)P_n(x)$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^2)(y_0P_n' - P_ny_0')(x)] = [\lambda_0 - n(n+1)](y_0P_n)(x);\ n=0,1,2,\ldots$$

Prin integrare, deoarece rezultă $P_n'(\pm 1) = \text{finit}$, $y_0(\pm 1) = \text{finit}$ (funcţiile proprii vor fi soluţii olomorfe în vecinătatea punctelor ± 1), găsim

$$[\lambda_0 - n(n+1)]\int_{-1}^{+1} y_0(x)\,P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

adică, deoarece $\lambda_0 \neq n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, avem

$$(y_0, P_n)_0 = \int_{-1}^{+1} y_0(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Pe de altă parte, deoarece $y_0 \in C^2([-1, +1])$, se poate scrie dezvoltarea Fourier

$$y_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

din care se deduce $y_0 = 0$, deoarece $a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)(y_0, P_n)_0 = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ceea ce contrazice ipoteza că y_0 este funcție proprie (deci neidentic nulă).

Exemplul 11. Să studiem micile vibrații ale unui fir omogen perfect flexibil, fixat la unul din capete, care se rotește într-un plan orizontal cu viteza unghiulară ω; se presupun cunoscute poziția și viteza inițială. Dacă firul are lungimea l, în secțiunea avînd abscisa

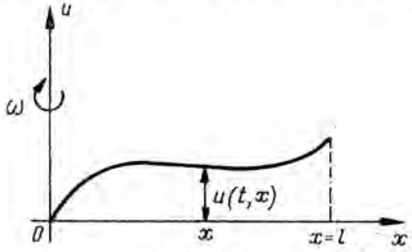

Fig. 4.2

egală cu x va acționa o tensiune dată de forța centrifugă a porțiunii cuprinse între x și l; notînd cu ρ densitatea liniară a firului, această tensiune va fi

$$p(x) = m\,\omega^2 r = \omega^2 \rho\,(l - x)\,\frac{l + x}{2} = \frac{1}{2}\,\omega^2 \rho(l^2 - x^2)$$

$\left[\text{ca și cum forța centrifugă ar acționa în punctul } r = \frac{1}{2}(l + x)\right]$, ceea ce arată că energia potențială a firului va fi egală cu

$$U(t) = \int_0^l p(x)\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} - 1\right]\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\int_0^l p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

[presupunînd această energie proporțională cu deformarea firului, această deformare este caracterizată prin $\mathrm{d}s - \mathrm{d}x = \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)^2} - 1\right]\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x$, obținută prin dezvoltare în serie a radicalului, factorul de proporționalitate fiind $p(x)$]. Deoarece energia cinetică este egală cu

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x,$$

prin aplicarea principiului lui Hamilton, adică prin optimizarea funcționalei

$$\int_{t_0}^{t_1} [T(t) - U(t)]\,\mathrm{d}t = \frac{\rho}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\omega^2(l^2 - x^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

se obține ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{2}{\omega^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2 - x^2)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right] \tag{4.69}$$

care este ecuația Euler-Ostrogradski a funcționalei în cauză; soluția trebuie găsită pentru $t \geq 0$, $0 < x < l$, astfel încît să se verifice condițiile inițiale

$$u(t, x)\Big|_{t=0} = f(x), \qquad \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x)$$

și condițiile la limită

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = \text{finit},$$

a căror interpretare este evidentă: prima condiție arată că firul este fixat la un capăt iar a doua permite firului să aibă o depărtare convenabilă de axa Ox la celălalt capăt.

Metoda separării variabilelor, deci în ipoteza $u(t, x) = T(t)\,v(x)$, conduce la concluzia că funcția T va fi o soluție a ecuației diferențiale

$$T'' + \frac{1}{2}\,\lambda\omega^2\,T = 0 \tag{4.69'}$$

iar v va fi neapărat o funcție proprie a problemei la limită singulară

$$(l^2 - x^2)v'' - 2xv' + \lambda v = 0,\ v(0) = 0,\ v(l) = \text{finit}; \tag{4.69''}$$

ecuația diferențială din (4.69'') se poate reduce la ecuația Legendre scriind $x = l\xi$, $0 < \xi < 1$, obținîndu-se problema la limită,

$$(1 - \xi^2)y''(\xi) - 2\xi y'(\xi) + \lambda y(\xi) = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = \text{finit}$$

cu $y(\xi) = v(l\xi)$. S-a văzut anterior că polinoamele Legendre sînt soluții ale acestei probleme dar pentru $x \in [-1, +1]$; deoarece $P_{2k-1}(0) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $P_{2k}(0) \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots$, va trebui să presupunem că valorile proprii sînt

$$\lambda = \lambda_k = 2k(2k-1), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

iar funcțiile definite inițial pentru $\xi \in [0, 1]$ (respectiv, pentru $x \in [0, l]$) vor fi presupuse prelungite prin imparitate la intervalul $[-1, +1]$ (respectiv la intervalul $[-l, +l]$), funcțiile proprii fiind

$$y_k(\xi) = P_{2k-1}(\xi) = P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Înlocuind valorile proprii în ecuația diferențială (4.69'), se deduc soluțiile

$$T_k(t) = a_k \cos\left(\sqrt{k(2k-1)}\,\omega t\right) + b_k \sin\left(\sqrt{k(2k-1)}\,\omega t\right), k = 1, 2, \ldots,$$

ceea ce conduce la soluţia

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\, v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\sqrt{k(2k-1)}\,\omega t) +$$

$$+ b_k \sin(\sqrt{k(2k-1)}\,\omega t)]\, P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right)$$

şirurile de constante (a_n) şi (b_n) determinîndu-se cu ajutorul condiţiilor iniţiale din egalităţile

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right), \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \omega \sqrt{k(2k-1)}\, P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right),$$

adică

$$a_k = \frac{4k-1}{l}\int_0^l f(x)\, P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{4k-1}{\omega l\sqrt{k(2k-1)}}\int_0^l g(x)\, P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x.$$

Este clar că raţionamentele analoage celor de la seriile trigonometrice conduc la concluzia că şirul $(P_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ este complet în mulţimea funcţiilor impare pe $[-l, +l]$, continue pe porţiuni în acest interval.

4.6.2. Separarea variabilelor în ecuaţia lui Laplace din $\mathbb{R}^3$ în coordonate sferice

Foarte multe probleme din fizica matematică conduc la integrarea ecuaţiei Laplace

$$\Delta_3 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,;$$

un studiu mai complet al soluţiilor acestei ecuaţii va fi realizat în vol. III, iar acum ne vom limita la determinarea unor soluţii particulare importante. Scriind ecuaţia Laplace în coordonate sferice (vezi cap. 3), adică

$$\Delta_3 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0,$$

unde $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ şi căutînd soluţii de forma

$$u(r, \theta, \varphi) = h(r)\, Y(\theta, \varphi),$$

metoda separării variabilelor conduce la ecuaţiile

$$r^2 h'' + 2rh' - \lambda h = 0,$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0, \qquad (4.70)$$

verificate de funcţiile h, respectiv Y. Funcţia $Y = Y(\theta, \varphi)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, care apare în aceste calcule se numeşte *funcţie sferică* iar ecuaţia cu derivate parţiale (4.70) verificată de aceasta se numeşte *ecuaţia funcţiilor sferice* şi trebuie integrată în condiţiile $Y(0, \varphi)$=finit, $Y(\pi, \varphi)$ = finit (care apar datorită intervenţiei funcţiei sinus la numitor) pentru variabila θ şi în condiţii de periodicitate, cu perioada 2π, pentru variabila φ (deoarece $Y \in C^2$, Y trebuie să fie funcţie uniformă, mărginită). Scriind în continuare $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$, din ecuaţia (4.70), prin înmulţire cu $\sin^2\theta$ şi împărţire cu $Y = \Theta\,\Phi$, iarăşi prin separare de variabile se va deduce pentru Φ ecuaţia $\Phi'' + \mu\,\Phi = 0$ ale cărei soluţii periodice, cu perioada 2π, se obţin numai dacă $\mu = m^2$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, care conduc la soluţiile

$$\Phi_m(\varphi) = c_m \exp(im\varphi) = c_m \operatorname{cis}(m\varphi),\ m \in \mathbb{Z}\,;$$

ecuaţia diferenţială verificată de funcţia Θ se va scrie

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\,\Theta) - \left(\frac{m^2}{\sin^2\theta} - \lambda\right)\Theta = 0,\quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

iar cu schimbarea

$$\cos\theta = x,\ \mathrm{d}x = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta,\ \sin\theta = \sqrt{1-x^2},\quad \Theta(\theta) = y(x)$$

ecuaţia devine

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' - \left(\frac{m^2}{1-x^2} - \lambda\right)y = 0 \qquad (4.70')$$

care coincide, pentru $\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, cu ecuaţia funcţiilor Legendre asociate (vezi 14.5, vol. I). Or, deoarece $y(-1) = \Theta(\pi) =$ = finit, $y(1) = \Theta(0)$ = finit, dacă $\lambda \neq l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, soluţiile ecuaţiei (4.70') nu pot fi mărginite pentru $x = \pm 1$ (în baza unui raţionament analog celui din cazul polinoamelor Legendre, sau în baza observaţiei că pentru $m = 0$ ecuaţia (4.70') este chiar ecuaţia Legendre, deci $y(\pm 1)$ = finit numai dacă $\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$). Prin urmare, valorile proprii ale problemei la limită $y(\pm 1)$ = finit, pentru ecuaţia (4.70') vor fi $\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, iar funcţiile proprii sînt funcţiile Legendre asociate

$$y_l(x) = P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x) =$$

$$= \frac{1}{2^l\, l!}(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}[(x^2-1)^l],\ l = 0, 1, 2, \ldots,\ m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l,$$

care formează un sistem ortonormal complet în $L_2([-1, +1])$.

Revenind la ecuaţia Laplace, pentru a găsi soluţiile particulare în cauză, mai trebuie integrată ecuaţia pentru funcţia $h = h(r)$, care fiind de tip Euler, pentru $\lambda = l(l+1)$ va admite soluţia generală

$$h_l(r) = a_l\, r^l + b_l\, r^{-l-1}.$$

Dacă notăm prin $Y_l^m = Y_l^m(\theta, \varphi)$ funcţia sferică (de ordinul $[l, m]$)

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta),\ l = 0, 1, 2, \ldots,\ m = 0, \pm, \ldots, \pm l, \qquad (4.70'')$$

rezultă soluţiile particulare

$$r^l \sum_{m=-l}^{l} A_l^m\, Y_l^m(\theta, \varphi),\quad r^{-l-1} \sum_{m=-l}^{l} B_l^m\, Y_l^m(\theta, \varphi),\ l = 0, 1, 2, \ldots,$$

ale ecuaţiei Laplace din $\mathbb{R}^3$, în coordonate sferice; evident, în locul soluţiei cu valori complexe (4.70'') se pot considera soluţiile cu valori reale obţinute prin considerarea separată a părţilor reale şi imaginare. Prin însumare se obţine soluţia

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[r^l \sum_{m=-l}^{l} A_l^m\, Y_l^m(\theta, \varphi) + r^{-l-1} \sum_{m=-l}^{l} B_l^m\, Y_l^m(\theta, \varphi) \right].$$

Utilizînd ortogonalitatea funcţiilor $(e^{imx})_{m\in\mathbb{Z}}$ pe intervalul $[0, 2\pi]$ şi a funcţiilor $(P_l^m)_{l=0,1,2,\ldots}$ pe intervalul $[-1, +1]$, se deduce ortogonalitatea şirului $(e^{im\varphi} P_l^m(x))$, $l=0, 1, 2, \ldots, m=0, \pm 1, \ldots, \pm l$, pe domeniul $[0, 2\pi] \times [-1, 1]$, sau ceea ce coincide cu ortogonalitatea şirului $(e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta))$, $l = 0, 1, 2, \ldots, m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$ pe $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ în raport cu măsura $d\omega_3 = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, adică pe sfera unitate din $\mathbb{R}^3$ deoarece elementul de arie al sferei unitate din $\mathbb{R}^3$ este $d\omega_3$ $(= \sin\theta\, d\theta\, d\varphi)$.

4.6.3. Armonice de suprafaţă şi armonice sferice

În multe situaţii concrete sînt necesare soluţii ale ecuaţiei Laplace $\Delta_3 u = 0$, uniforme şi mărginite pe sfera de rază a din $\mathbb{R}^3$; în 4.6.2 s-au determinat acest tip de soluţii care apar prin separare de variabile [trebuie ţinut seama că ecuaţia (4.70') admite şi soluţii nemărginite, care au fost eliminate prin condiţiile suplimentare impuse]. Soluţiile notate prin $Y_l^m(\theta, \varphi)$, $l = 0, 1, 2, \ldots, m = 0, \pm 1, \ldots$

$\ldots, \pm l$, sînt continue şi mărginite pe sfera unitate din $\mathbb{R}^3$ şi sînt periodice cu perioada 2π în raport cu φ şi pot fi scrise şi sub forma

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos\theta)\,[A_{ml}\cos(m\varphi) + B_{ml}\sin(m\varphi)].$$

În baza liniarităţii ecuaţiei 4.70, o soluţie continuă pe sfera unitate din $\mathbb{R}^3$ va fi funcţia (scrisă sub forma reală)

$$Y_l(\theta, \varphi) = A_{0l}\, P_l(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{l} P_l^m(\cos\theta)[A_{ml}\cos(m\varphi) + B_{ml}\sin(m\varphi)],$$

unde A_{ml} şi B_{ml} sînt constante; această soluţie se numeşte *armonica pe suprafaţă sferică de grad l* (ţinînd seama că soluţiile continue într-un domeniu ale ecuaţiei Laplace se numesc *funcţii armonice*). În particular, armonice de suprafaţă de grad n vor fi funcţiile

$$Y_{nm}^{(e)}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\theta)\cos(m\varphi),$$

$$Y_{nm}^{(o)}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\theta)\sin(m\varphi), \quad m = 0, 1, \ldots, m,$$

care pentru $m \geqslant 1$ sînt funcţii pare, respectiv impare de φ [dacă $m=0$, rezultă $Y_{no}^{(e)}(\theta, \varphi) = P_n(\cos\theta)$].

Dacă $m < n$, armonicele de suprafaţă $Y_{nm}^{(e)}$, $Y_{nm}^{(o)}$ se numesc *armonice tesserale* iar dacă $m=n$, se numesc *armonice sectoriale*; polinoamele Legendre se mai numesc şi *armonice zonale*.

Dacă $\varphi = \dfrac{1}{2m}(2k-1)\pi$, $k = 1, 2, \ldots, m$, este un cerc meridian al sferei $r = a$, armonicele de suprafaţă $Y_{nm}^{(e)}$ se anulează iar armonicele $Y_{nm}^{(o)}$ se vor anula de-a lungul cercurilor meridiane $\varphi = \dfrac{k}{m}\pi$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Deoarece funcţia Legendre asociată P_n^m are exact $n-m$ zerouri în $]-1, 1[$, se deduce că funcţia $P_n^m(\cos\theta)$ va avea tot $n-m$ zerouri, dar în intervalul $]0, \pi[$; notînd cu $\theta_1, \ldots, \theta_{n-m}$ aceste zerouri, se deduce că armonicele de suprafaţă $Y_{nm}^{(o)}$ şi $Y_{nm}^{(e)}$ se anulează de-a lungul cercurilor paralele $\theta = \theta_j$, $j=1, \ldots, n-m$. Dacă $m < n$, curbele de pe suprafaţa sferei $r=a$ de-a lungul cărora se anulează armonicele $Y_{nm}^{(o)}$ şi $Y_{nm}^{(e)}$ divid suprafaţa sferei în regiuni numite *tesserale* şi în care o armonică tesserală păstrează un semn constant; dacă $m=n$, avem $P_n^m(\cos\theta) = A\sin^n\theta$, $A \in \mathbb{R}$, şi deci curbele pe care se anulează armonicele sectoriale vor fi sectoare sferice în care aceste armonice păstrează acelaşi semn. Curbele de-a lungul cărora se anulează armonicele zonale Y_{no} sînt cercuri avînd

latitudinea $\theta = \theta_j$, $j = 1, \ldots, n$, ceea ce face ca suprafața sferiei să se separe într-un număr de zone sferice în care armonicele zonale au semn constant.

Prin definiție, prin *armonice sferice de grad n se* înțeleg funcțiile

$$u_n(r, \theta, \varphi) = r^n Y_n(\theta, \varphi)$$

și deci vor fi soluții continue în $\mathbb{R}^3$ ale ecuației Laplace $\Delta_3 u = 0$; de asemenea, funcțiile

$$v_n(r, \theta, \varphi) = r^{-n-1} Y_n(\theta, \varphi)$$

fiind mărginite în afara oricărei sfere $r = a$, $a > 0$, vor fi armonicele sferice definite în domeniul nemărginit $r > a > 0$. Dacă $0 < a < r < b$, atunci armonicele sferice vor fi combinații liniare ale funcțiilor u_n și v_n definite anterior.

Funcțiile sferice normate y_l^m vor fi

$$y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l-m)!\,(2l+1)}{(l+m)!\,4\pi}}\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l,$$

și vor forma un șir ortonormal și complet pe suprafața sferei unitate din $\mathbb{R}^3$, putînd fi considerate funcțiile proprii ale problemei la limită

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \lambda v = 0,$$

$$v(0, \varphi) = \text{finit}, \quad v(\pi, \varphi) = \text{finit},$$

v fiind periodică cu perioada 2π în raport cu variabila φ.

4.6.4. Polinoamele ortogonale ca funcții proprii

Considerațiile din 4.6.1 se extind fără nici o modificare la orice sistem $(Q_n)_{n\geq 0}$ de polinoame ortogonale, intervalul de ortogonalitate $[a, b]$ avînd lungimea finită dacă ponderea ρ verifică ecuația diferențială

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x, \quad \beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2, \ |\alpha_1| + |\beta_2| > 0,$$

și condițiile la capete $(\rho\beta)(a) = 0$, $(\rho\beta)(b) = 0$; într-adevăr, în aceste ipoteze Q_n verifică ecuația diferențială

$$\beta(x)\, y'' + [\alpha(x) + \beta'(x)]\, y' - n\,[(n+1)\,\beta_2 + \alpha_1]\, y = 0$$

a cărei formă autoadjunctă va fi

$$(\rho\beta y')' - n[(n+1)\,\beta_2 + \alpha_1]\,\rho y = 0.$$

Introducînd operatorul diferențial $\mathrm{P} : C^2([a, b]) \to C([a, b])$, unde $\mathrm{P}y = \frac{1}{\rho}(\rho\beta y')'$, valorile și funcțiile proprii corespunzătoare vor verifica ecuația diferențială

$$\mathrm{P}y = \lambda y; \qquad y \in C^2([a, b]).$$

Comparînd cu ecuația diferențială a polinoamelor ortogonale, rezultă valorile proprii

$$\lambda_n = n[(n+1)\beta_2 + \alpha_1], \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

iar funcțiile proprii vor fi

$$y_n(x) = Q_r(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

deoarece ipotezele $\rho(a)\,\beta(a) = 0$, $\rho(b)\,\beta(b) = 0$ arată că ecuația diferențială $\mathrm{P}y = \lambda y$ admite ca puncte singulare capetele a și b ale intervalului de ortogonalitate iar y va fi funcție mărginită în intervalul $[a, b]$ dacă $y(x) = Q_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Cu aceeași argumentație ca în 4.6.1 se arată că nu există alte valori proprii în afara valorilor $\lambda_n = n[(n+1)\,\beta_2 + \alpha_1]$, dar este posibil ca multiplicitatea unei valori proprii să fie egală cu doi, deoarece a doua soluție, de exemplu, pentru polinoamele Jacobi fiind

$$Q_n^*(x) = J_n^{(p,q)}(x) \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{(1-t)^{p+1}(1+t)^{q+1}\,[J_n^{(p,q)}(t)]^2},$$

integrala improprie este convergentă dacă $-1 < p < 0$, $-1 < q < 0$, ceea ce înseamnă $Q_n^*(\pm 1) = \text{finit}$.

Dacă însă lungimea intervalului de ortogonalitate nu este finită, problema funcțiilor și valorilor proprii nu se pune pentru șirul polinoamelor ortogonale ci pentru funcții convenabil alese, cu anumite proprietăți la infinit; astfel, dacă $I =]0, \infty[$, în locul polinoamelor Laguerre se iau în considerație funcțiile Laguerre iar dacă $I =]-\infty, +\infty[$, se înlocuiesc polinoamele Hermite cu funcțiile

Hermite, ceea ce face ca toate considerațiile anterioare să fie valabile (aceste funcții sînt nule la infinit).

Trebuie însă făcută observația că spre deosebire de cazul polinoamelor Legendre, cu ajutorul cărora s-a exemplificat teoria din 4.6.1, în cazul celorlalte sisteme de polinoame ortogonale produsul scalar se consideră avînd ponderea ρ (ponderea în raport cu care se definește ortogonalitatea șirului de polinoame considerat) ; în orice caz, această situație (adică apariția unei ponderi în calcule) este determinată de însuși operatorul diferențial considerat : se observă că ponderea este prezentă prin factorul $1/\rho$ în definiția operatorului dat.

4.6.5. Dezvoltări în serie de polinoame ortogonale

În baza unui rezultat cunoscut, dacă lungimea intervalului $]a, b[$ este finită, orice șir de polinoame ortogonale este închis în $C_*([a, b])$, adică seria Fourier pentru f

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(x), \quad a_n = \frac{(f, Q_n)_\rho}{\|Q_n\|_\rho^2}, \tag{4.71}$$

este convergentă în medie către f.

În cazul șirului de polinoame Legendre, deoarece $\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$, această dezvoltare se scrie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) (f, P_n)\, P_n(x). \tag{4.71'}$$

Convergența uniformă a acestor serii ortogonale se poate demonstra, în condiții suplimentare impuse lui f, exact la fel ca și în cazul seriilor trigonometrice iar convergența în fiecare punct din $]a, b[$ are loc, presupunînd $f(x) = \dfrac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ într-un punct x de salt pentru f (deci f se presupune standardizată).

Într-adevăr, dacă șirul $(Q_n)_{n\geq 0}$ este ortonormat și $(s_n(x))$ este șirul sumelor parțiale ale seriei (4.71), găsim deoarece $a_n = (f, Q_n)_\rho$

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k(x) = \sum_{k=0}^{n} (f, Q_k)_\rho Q_k(x) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(x) \int_a^b \rho f(t) Q_k(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \rho f(t) \left[\sum_{k=1}^{n} Q_k(x) Q_k(t) \right] dt = \int_a^b \rho K_n(x, t) f(t) dt \, ; K_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(x) Q_k(t)$$

în ipoteza că nucleul $K_n(x, t)$ are proprietăți asemănătoare cu nucleul lui Dirichlet pentru serii trigonometrice utilizat în 4.4.3, în baza unei justificări complet analoage celei din 4.4.3 se deduc

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$$

în orice punct $x \in]a, b[$. În ceea ce privește nucleul K_n definit mai sus, este valabilă

Teorema 4.10 (*Cristoffel-Darboux*). *Dacă se notează*

$$K_n(x, t) = \sum_{k=0}^{n} Q_k(x)\, Q_k(t) \tag{4.72}$$

în ipoteza ortonormalității șirului (Q_n), $n = 0, 1, \ldots$, *atunci scriind*

$$Q_k(x) = a_k x^k + b_k x^{k-1} + \ldots, a_k \neq 0, k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.72'}$$

avem

$$K_n(x, t) = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{Q_n(x)\, Q_{n+1}(t) - Q_n(t)\, Q_{n+1}(x)}{t - x}. \tag{4.72''}$$

⌜ Demonstrația se bazează pe formula de recurență a polinoamelor ortogonale, care însă trebuie modificată, deoarece nu se presupune șirul de polinoame avînd coeficientul puterii maxime egal cu unitatea ; scriind relația de recurență amintită

$$xQ_n(x) = A_{n+1} Q_{n+1}(x) + A_n Q_n(x) + A_{n-1} Q_{n-1}(x) \tag{4.73}$$

și utilizînd coeficienții a_n și b_n din (4.72'), prin egalarea coeficienților puterilor x^{n+1} și x^n se obțin egalitățile

$$a_n = A_{n+1}\, a_{n+1}, \; b_n = A_{n+1} + A_n\, a_n$$

din care se deduc valorile lui A_{n+1} și A_n :

$$A_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad A_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}.$$

Pentru a obține coeficientul A_{n-1}, se înmulțește scalar identitatea (4.73) cu Q_{n-1} și se va găsi

$$A_{n-1} = \frac{(x\, Q_n, Q_{n-1})_\rho}{\|Q_{n+1}\|_\rho^2} = (Q_n, x\, Q_{n-1})_\rho = \frac{a_n}{a_{n+1}},$$

dacă se folosește ipoteza de ortonormalitate și faptul că se poate scrie în loc de $x\,Q_{n-1}(x)$ descompunerea

$$x\,Q_{n-1}(x) = B_n\,Q_n(x) + B_{n-1}\,Q_{n-1}(x) + \ldots,$$

ceea ce înseamnă $(Q_n, x\,Q_{n-1})_\rho = B_n\|Q_n\|_\rho^2 = B_n$, B_n obținîndu-se prin identificarea coeficienților lui x^n, adică $a_{n-1} = B_n\,a_n$. Prin urmare, identitatea (4.73) se va scrie numai cu ajutorul coeficienților primelor două puteri din expresiile polinoamelor ortogonale, astfel:

$$x\,Q_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}}\,Q_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)Q_n(x) + \frac{a_n}{a_{n-1}}\,Q_{n-1}(x). \tag{4.73'}$$

Înmulțind această egalitate cu $Q_n(t)$, se găsește identitatea

$$xQ_n(x)\,Q_n(t) = \frac{a_n}{a_{n+1}}\,Q_{n+1}(x)\,Q_n(t) +$$

$$+\left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)Q_n(x)\,Q_n(t) + \frac{a_n}{a_{n-1}}\,Q_{n-1}(x)\,Q_n(t),$$

din care dacă se scade aceeași identitate dar scrisă cu t în loc de x și x în loc de t, cu notația $w_n(x, t) = Q_{n+1}(x)\,Q_n(t) - Q_{n+1}(t)\,Q_n(x)$, se găsește

$$(x - t)\,Q_n(x)\,Q_n(t) = \frac{a_n}{a_{n+1}}\;{}_n(x, t) - \frac{a_n}{a_{n-1}}\,w_{n-1}(x, t).$$

Pentru $n=1,2,\ldots$ se vor obține n egalități, care adunate dau (4.72''). ┘

De exemplu, în cazul polinoamelor Legendre, deoarece șirul ortonormat va fi $P_n^* = \sqrt{n + \frac{1}{2}}\,P_n$, cum $P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n\,(n!)^2}\,x^n + c\,x^{n-2} + \ldots$, avem $a_n = \dfrac{(2n)!\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{2^n(n!)^2}$, $b_n = 0$, ceea ce înseamnă

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{2n+1}\sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} = \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}$$

iar identitatea (4.72''), care definește *nucleul Dirichlet-Legendre* și se notează $L_n(x, t)$, va da

$$L_n(x, t) = \frac{a_n}{a_{n+1}}\;\frac{P_n^*(x)\,P_{n+1}^*(t) - P_n^*(t)\,P_{n+1}^*(x)}{t - x} =$$

$$= \frac{n+1}{2}\;\frac{P_n(x)\,P_{n+1}(t) - P_n(t)\,P_{n+1}(x)}{t - x}.$$

Prin urmare, în acest caz

$$s_n(x) = \int_{-1}^{+1} L_n(x, t)\,f(t)\,dt = \frac{n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(x)\,P_{n+1}(t) - P_n(t)\,P_{n+1}(x)}{t - x}\,f(t)\,dt$$

și operînd la fel ca și în demonstrația teoremei 4.3, se deduce

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{2}\,P_n(x)\int_{-1}^{+1} f(t)\,P_n(t)\,dt = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)],$$

dacă $x \in\,]-1, +1[$ iar $f \in C_*^1([-1, +1])$.

Dacă intervalul $]a, b[$ nu are lungimea finită, așa cum se întîmplă în cazul polinoamelor Hermite și Laguerre, rezultatele anterioare rămîn valabile cu condiția să se înlocuiască aceste polinoame prin funcțiile corespunzătoare; astfel, în locul polinoamelor Laguerre $L_n^{(\lambda)}$ se utilizează funcțiile Laguerre:

$$\mathscr{L}_n^{(\lambda)}(x) = x^{\frac{\lambda}{2}}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)L_n^{(\lambda)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \lambda > -1,$$

iar în locul polinoamelor Hermite H_n se pot folosi funcțiile Hermite $\mathscr{H}_n$ definite prin

$$\mathscr{H}_n(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Funcțiile $(\mathscr{L}_n^{(\lambda)})$ pot fi considerate ca fiind rezultatul ortogonalizării șirului liniar independent

$$x^{\frac{\lambda}{2}}\,e^{-\frac{x}{2}},\ x^{\frac{\lambda}{2}+1}\,e^{-\frac{x}{2}}, \ldots, x^{\frac{\lambda}{2}+n}\,e^{-\frac{x}{2}}, \ldots$$

în intervalul $]0, \infty[$ cu pondere $\rho(x) = 1$, deoarece

$$(L_n^{(\lambda)}, L_m^{(\lambda)}) = \int_0^{\infty} x^{\lambda}\,e^{-x}L_n^{(\lambda)}(x)L_m^{(\lambda)}(x)\,dx = \int_0^{\infty}\mathscr{L}_n^{(\lambda)}(x)\,\mathscr{L}_m^{(\lambda)}(x)\,dx = 0, \ n \neq m,$$

iar funcţiile $(\mathscr{H}_n)$ se obţin prin ortogonalizarea şirului

$$e^{-\frac{x^2}{2}},\ x\,e^{-\frac{x^2}{2}},\ldots,x^n e^{-\frac{x^2}{2}},\ldots$$

cu pondere $\rho(x)=1$ pe $\mathbb{R}$. S-a văzut că aceste şiruri de funcţii ortogonale formează sisteme închise în $C_*(]a,b[)$ iar celelalte probleme legate de convergenţa seriilor Fourier corespunzătoare se tratează analog cu metoda folosită la serii trigonometrice.

4.7. Funcţiile Bessel ca funcţii proprii

În baza teoriei din vol. I, cap. 13 şi 17, se pot găsi rezultate asemănătoare celor din 4.6 înlocuind polinoamele ortogonale prin funcţii Bessel; pentru aceasta, se utilizează operatorul diferenţial

$$-\mathrm{P}y=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\,y')-\frac{\nu^2}{x^2}y,\qquad \nu\geqslant 0, \tag{4.74}$$

ale cărui funcţii şi valori proprii, determinate prin egalitatea

$$-\mathrm{P}y=\lambda y, \tag{4.75}$$

se vor obţine prin integrarea ecuaţiei diferenţiale

$$x^2y''+xy'-\nu^2y+\lambda x^2y=0, \tag{4.75'}$$

care, pentru $\lambda=1$, coincide cu ecuaţia Bessel. Condiţiile la limită care se ataşează ecuaţiei (4.75) şi care determină mulţimea de definiţie a operatorului diferenţial P, provin din practică şi vom lua în consideraţie doar următoarele:

$$y(0)=\text{finit},\ y(l)=0,\ l>0 \tag{4.74}$$

(în orice caz prima condiţie la limită (4.74') este oarecum o condiţie naturală, datorată singularităţii $x=0$ a ecuaţiei Bessel); în acest mod, operatorul P introdus prin (4.74) va fi definit pe mulţimea funcţiilor de clasă C^2 pe intervalul $[0,l]$ care sînt nule pentru $x=l$. Această ultimă condiţie poate fi înlocuită fie prin condiţia $y'(l)=0$, fie prin $y(l)+\alpha y'(l)=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Această problemă la limită se poate rezolva cu uşurinţă, în baza consideraţiilor din vol. I, cap. 13 şi 17; într-adevăr, se verifică

imediat că orice soluţie a ecuaţiei diferenţiale (4.75') se scrie sub forma

$$y(x)=c_1J_\nu(\sqrt{\lambda}\,x)+c_2N_\nu(\sqrt{\lambda}\,x), \tag{4.75''}$$

J_ν şi N_ν fiind funcţiile Bessel de speţa I, respectiv II. Deoarece $J_\nu(0)=0$, dacă $\nu>0$ şi $J_0(0)=1$, iar $|N_\nu(0)|=\infty$, prima condiţie la limită (4.74') va fi verificată numai dacă $c_2=0$ [dacă $\nu\notin\mathbb{Z}$, atunci în locul lui N_ν se poate utiliza funcţia Bessel $J_{-\nu}(z)$ de speţa I care pentru $z=0$ are de asemenea proprietatea $|J_{-\nu}(0)|=\infty$]; aşadar, soluţia generală (4.75'') se reduce la $y(x)=c_1J_\nu(\sqrt{\lambda}\,x)$ şi prin utilizarea celei de-a doua condiţii la limită (4.74') se ajunge la egalitatea $J_\nu(\sqrt{\lambda}\,l)=0$ care arată că satisfacerea ei impune $\sqrt{\lambda}\,l=\mu_k^\nu$, $k=1,2,\ldots$, unde $(\mu_k^\nu)_{k\in\mathbb{N}}$ formează şirul (crescător) al zerourilor reale ale funcţiei Bessel J_ν. Prin urmare, valorile proprii ale problemei la limită în cauză vor fi

$$\lambda_k=\left(\frac{\mu_k^\nu}{l}\right)^2,\qquad k=1,2,\ldots,$$

iar funcţiile proprii se vor scrie

$$y_k(x)=c_kJ_\nu\left(\frac{\mu_k^\nu}{l}x\right),\qquad k=1,2,\ldots,$$

unde c_k poate fi egal cu unitatea sau cu $\dfrac{1}{\left\|J_\nu\left(\frac{\mu_k^\nu}{l}x\right)\right\|_\rho}$, dacă se au în vedere şiruri ortonormale de funcţii; în orice caz, şirul funcţiilor proprii va fi ortogonal, cu pondere $\rho(x)=x$ (această pondere se poate deduce şi din forma operatorului diferenţial P, dacă se reţine observaţia din 4.6.4) pe intervalul $[0,l]$, ceea ce permite dezvoltarea în serie Fourier-Bessel (formală)

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_\nu\left(\frac{\mu_k^\nu}{l}x\right),\qquad a_k=\frac{\left(f(x),\,J_\nu\left(\frac{\mu_k^\nu}{l}x\right)\right)_\rho}{\left\|J_\nu\left(\frac{\mu_k^\nu}{l}x\right)\right\|_\rho^2}$$

unde

$$\left(f(x),\,J_\nu\left(\frac{\mu_k^\nu}{l}x\right)\right)_\rho=\int_0^l x\,f(x)\,J_\nu\left(\frac{\mu_k^\nu}{l}x\right)\mathrm{d}x.$$

Calculele mult prea complicate şi lungi pentru a putea fi redate aici arată că seria Fourier-Bessel pentru funcţia f netedă pe porţiuni în intervalul $[0, l]$, considerată standardizată în punctele de salt, converge în fiecare punct x din $]p, l[$ către $f(x)$ (dacă f este continuă pe porţiuni sau cu pătrat integrabil, seria Fourier-Bessel converge în medie către f).

Exemplul 12. *Propagarea căldurii într-un cilindru infinit, presupunînd distribuţia iniţială a temperaturilor dată prin funcţia f, unde $f=f(\sqrt{x^2+y^2})$.* Dacă $u = u(t, x, y, z)$ este temperatura în cilindrul $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant l^2$, $z \in \mathbb{R}$ la momentul t, atunci u va verifica ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_3 u, \qquad \Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad a > 0,$$

în ipoteza că în interiorul cilindrului nu se află surse de încălzire (sau răcire). Utilizînd sistemul cilindric de coordonate din $\mathbb{R}^3$, adică $x = r\cos\theta$, $y = r\cos\theta$, $z = z$, $r \geqslant 0$ $0 \leqslant \theta < 2\pi$, se obţine ecuaţia

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$

la care se adaugă condiţia iniţială $u(0, r, \theta, z) = f(r)$; în ipoteza că suprafaţa laterală a cilindrului este menţinută permanent la temperatura de 0°C, adică $u(t, l, \theta, z) = 0$, se deduce că u nu va depinde de variabilele θ şi z : $u = u(t, r)$. În concluzie, trebuie găsită soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}, \qquad t \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant r \leqslant l,$$

care verifică datele suplimentare

$$u(0, r) = f(r) \qquad \text{(condiţia iniţială)},$$

$$u(t, l) = 0 \qquad \text{(condiţia la limită)},$$

soluţie care se poate găsi utilizînd metoda separării variabilelor. Deci în ipoteza $u(t, r) = T(t)\, v(r)$ se obţin ecuaţiile diferenţiale

$$T' + \lambda a^2 T = 0, \qquad v'' + \frac{1}{r}v' + \lambda v = 0,$$

verificate de funcţiile T şi v respectiv; condiţia la limită obligă ataşarea la ecuaţia pentru v a condiţiei $v(l) = 0$, în afară de condiţia obligatorie $v(0) =$ finit (temperatura în cilindru nu poate fi infinită pe axa Oz). Comparînd cu (4.75'), se deduce $\nu = 0$, deci valorile şi funcţiile proprii vor fi

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k^0}{l}\right)^2, \quad v_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k^0}{l} r\right), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

şi deoarece (integrînd ecuaţia diferenţială pentru funcţia T)

$$T_k(t) = b_k \exp\left[-\left(\frac{\mu_k^0}{l}a\right)^2 t\right], \qquad k = 1, 2, \ldots, \; b_k \in \mathbb{R},$$

se găseşte soluţia

$$u(t, r) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\, v_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp\left[-\left(\frac{\mu_k^0}{l}a\right)^2 t\right] J_0\left(\frac{\mu_k^0}{l} r\right)$$

în care şirul $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de constante se determină din dezvoltarea Fourier-Bessel (determinată prin condiţia iniţială)

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0\left(\frac{\mu_k^0}{l} r\right),$$

deci

$$b_k = \frac{\left(f(r), J_0\left(\frac{\mu_k^0}{l} r\right)\right)_\rho}{\left\| J_0\left(\frac{\mu_k^0}{l} r\right)\right\|_\rho^2}, \qquad \rho(r) = r.$$

4.8. Existenţa funcţiilor şi valorilor proprii pentru operatori diferenţiali

4.8.1. Generalităţi

În consideraţiile anterioare un rol esenţial în determinarea soluţiilor unor probleme practice l-au jucat funcţiile şi valorile proprii ale operatorilor diferenţiali (în ipoteza că spectrul este discret); de aceea este important de determinat condiţiile suficiente în care operatorii diferenţial admit o infinitate numărabilă de funcţii proprii (în mulţimea de definiţie considerată). Cazurile concrete aduse în discuţie s-au caracterizat prin posibilitatea determinării efective a funcţiilor şi valorilor proprii, posibilitate care nu poate fi extinsă la orice operator diferenţial; în plus, în aceste cazuri, şirul valorilor proprii a fost un şir de numere reale, admiţînd $+\infty$ ca punct de acumulare iar şirul funcţiilor proprii a fost un şir ortonormal şi complet. Este clar că toate aceste împrejurări referitoare la şirul funcţiilor şi valorilor proprii vor trebui să apară şi în cazul funcţiilor

şi valorilor proprii ale unui operator diferenţial oarecare, dacă se are în vedere aplicarea metodei separării variabilelor; aşadar, dacă $\mathrm{P}=\mathrm{P}(\mathbf{x}, \mathrm{D})$ este un operator diferenţial de ordinul N, adică

$$\mathrm{P}u = \sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha(\mathbf{x}) \mathrm{D}^\alpha u, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{4.76}$$

coeficienţii a_α fiind de o clasă convenabilă în domeniul $D_n \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{D}_n$ un compact iar $\partial D_n \in C^2$ (cel puţin pe porţiuni), vom găsi condiţii suficiente în care problema la limită

$$\mathbf{B}u(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial D_n} = 0 \tag{4.76'}$$

admite o infinitate numărabilă de funcţii şi valori proprii. Cu alte cuvinte, problema

$$\mathrm{P}u - \lambda u = 0, \qquad \mathbf{B}u|_{\partial D_n} = 0 \tag{4.76''}$$

admite o infinitate numărabilă de soluţii nenule, corespunzătoare valorilor proprii $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$; aici prin $\mathbf{B}u$ s-au notat condiţiile la frontieră care intervin în problema dată.

Vom face ipoteza că funcţiile proprii sînt elemente ale spaţiului Sobolev $H_0^m(D_n)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, pentru un m determinat, strîns legat de ordinul N al operatorului diferenţial P în discuţie iar produsul scalar $(\varphi, \mathrm{P}\psi)_0$, cu ajutorul condiţiilor la limită (4.76') şi a operatorului diferenţial, se poate transforma într-o *funcţională biliniară* în spaţiul $H_0^m(D_n)$ pe care o vom nota prin $\mathrm{A}(\varphi, \psi)$. Aşadar, $A: H_0^m \times H_0^m \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{A}(\varphi, \psi) = (\varphi, \mathrm{P}\psi)_0, \quad \varphi, \psi \in H_0^m(D_n), \tag{4.77}$$

iar dacă a_1, b_1, a_2, b_2 sînt numere reale oarecare şi $\varphi, \psi, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sînt elemente oarecare din $H_0^m(D_n)$, au loc egalităţile

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1 \mathrm{A}(\varphi_1, \psi) + a_2 \mathrm{A}(\varphi_2, \psi), \\ &\mathrm{A}(\varphi, b_1\psi_1 + b_2\psi_2) = b_1 \mathrm{A}(\varphi, \psi_1) + b_2 \mathrm{A}(\varphi, \psi_2); \end{aligned} \tag{4.77'}$$

în plus se presupune funcţionala biliniară A *mărginită* (adică

$$|\mathrm{A}(\varphi, \psi)| \leqslant a \|\varphi\|_m \|\psi\|_m \tag{4.77''}$$

pentru orice $\varphi, \psi \in H_0^m(D_n)$ cu $a \in \mathbb{R}_+$ independent de φ şi ψ) *simetrică* [adică

$$\mathrm{A}(\varphi, \psi) = \mathrm{A}(\psi, \varphi) \tag{4.77'''}$$

pentru orice $\varphi, \psi, \in H_0^m(D_n)$] şi *coercitivă* în $H_0^m(D_n)$ [adică vor exista constantele reale k_0 şi k_1, independente de φ cu $k_1 > 0$, astfel încît

$$\mathrm{A}(\varphi, \varphi) \geqslant k_1 \|\varphi\|_m^2 - k_0 \|\varphi\|_0^2 \tag{4.78}$$

pentru orice $\varphi \in H_0^m(D_n)$]. Fără a constitui o particularizare, se poate presupune $k_0 = 0$, deoarece dacă avem $k_0 \leqslant 0$, atunci $-k_0 \|\varphi\|_0^2 \geqslant 0$ şi deci cu atît mai mult

$$\mathrm{A}(\varphi, \varphi) \geqslant k_1 \|\varphi\|_m^2; \tag{4.78'}$$

dacă avem $k_0 > 0$, înlocuind operatorul diferenţial P, definit cu ajutorul lui (4.76) prin operatorul $\mathrm{P}+k_0$, cu ajutorul proprietăţilor produsului scalar avem

$$(\varphi, (\mathrm{P} + k_0)\varphi)_0 = (\varphi, \mathrm{P}\varphi)_0 + k_0(\varphi, \varphi)_0 \geqslant k_1 \|\varphi\|_m^2 - k_0 \|\varphi\|_0^2 + k_0 \|\varphi\|_0^2 = k_1 \|\varphi\|_m^2,$$

dacă se ţine seama de inegalitatea (4.78). Aşadar, în viitor vom considera inegalităţile (4.78) şi (4.78') ca fiind echivalente.

Să definim valorile şi funcţiile proprii ale operatorului P dat de (4.76) în ipoteza că se verifică datele la limită (4.76'); funcţia $u \in H_0^m(D_n), \|u\|_0 \neq 0$, este o funcţie proprie a operatorului diferenţial P, corespunzînd valorii proprii λ, dacă pentru orice $\varphi \in H_0^m(D_n)$ se verifică egalitatea

$$\mathrm{A}(\varphi, u) - \lambda(\varphi, u)_0 = 0. \tag{4.79}$$

Este evident că relaţia de definiţie (4.79) se poate deduce direct din ecuaţia $\mathrm{P}u = \lambda u$ prin efectuarea produsului scalar cu φ (ţinînd seama de definiţia formei biliniare A); dar definiţia (4.79) nu pretinde să avem $u \in C^N(D_n)$, ceea ce constituie un avantaj. Evident, funcţiile proprii definite ca elemente ale spaţiului Sobolev $H_0^m(D_n)$ trebuie considerate soluţii slabe (vezi 4.1.3) ale ecuaţiei $\mathrm{P}u = \lambda u$ iar ipoteza $\|u\|_0 \neq 0$ permite să presupunem în viitor $\|u\|_0 = 1$, deoarece egalitatea (4.79) este verificată odată cu u şi de $\dfrac{u}{\|u\|_0}$.

O observaţie utilă este aceea că în egalitatea de definiţie (4.97) se poate presupune φ funcţie-test, adică $\varphi \in C_0^\infty(D_n)$; într-adevăr, vor exista funcţiile-test ψ_k, $k = 1, 2, \ldots$ astfel încît $\psi_k \to \varphi$ (convergenţă în H_0^m), ceea ce, prin trecere la limită pentru $k \to \infty$, în egalitatea

$$\mathrm{A}(\psi_k, u) - \lambda(\psi_k, u)_0 = 0$$

va conduce la (4.79), utilizînd mărginirea și liniaritatea, atît a lui A cît și a produsului scalar $(\psi_k, u)_0$.

Dacă operatorul diferențial P definit prin (4.76) este formal autoadjunct, atunci funcționala biliniară A este o formă simetrică ; într-adevăr, avem

$$A(\varphi, \psi) = (\varphi, P\psi)_0 = (P^+\varphi, \psi)_0 = (P\varphi, \psi)_0 = (\psi, P\varphi)_0 = A(\psi, \varphi)$$

[utilizînd ipoteza $P^+ = P$ și simetria produsului scalar : $(P\varphi, \psi)_0 = (\psi, P\varphi)_0$].

Exemple. 13. Dacă

$$Py = -\frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y, \quad y(a) = y(b) = 0,$$

$p, q, p' \in C^0([a, b])$, avem

$$(\varphi, Py)_0 = \int_a^b \varphi\, Py\, dx = -\int_a^b \varphi \frac{d}{dx}(py')\, dx + \int_a^b q\varphi y\, dx =$$

$$= -p\varphi y'\Big|_a^b + \int_a^b (p\varphi' y' + q\varphi y)\, dx = \int_a^b (p\varphi' y' + q\varphi y)\, dx$$

dacă se ține seama că $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, φ fiind o funcție-test ; așadar, aici

$$A(\varphi, \psi) = \int_a^b (p\varphi'\psi' + q\varphi\psi)\, dx$$

și evident A este o funcțională biliniară simetrică.

14. Dacă $P = -\Delta_n$, adică

$$-Pu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad n > 1,$$

în baza formulei flux-divergență, găsim

$$A(\varphi, \psi) = (\varphi, P\psi)_0 = -\int_{D_n} \varphi\, \Delta_n \psi\, d\mathbf{x} = \int_{D_n} \nabla_n \varphi \cdot \nabla_n \psi\, d\mathbf{x} - \int_{\partial D_n} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

unde $\nabla_n = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ este operatorul nabla iar $\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \nu_j$ este derivata funcției ψ după direcția normalei exterioare la ∂D_n ; cum φ este funcție-test, integrala calculată pe ∂D_n va fi nulă și deci

$$A(\varphi, \psi) = \int_{D_n} \nabla_n \varphi \cdot \nabla_n \psi\, d\mathbf{x} = \int_{D_n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right) d\mathbf{x},$$

obținîndu-se o funcțională biliniară și simetrică. În plus,

$$A(\varphi, \varphi) = \int_{D_n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2\right] d\mathbf{x} = \|\varphi\| - \|\varphi\|_0^2,$$

adică, prin comparație cu (4.78), avem $0 < k_1 \leqslant 1$, $k_0 = 1$.

În ipoteza că λ este o valoare proprie pentru o problemă la limită atașată operatorului diferențial P, numărul $\lambda + k$ pentru un $k \in \mathbb{R}$ dat este o valoare proprie pentru aceeași problemă la limită, dar pentru operatorul diferențial $P + k$, deoarece din egalitatea $A(\varphi, u) = \lambda(\varphi, u)_0$, cu $A(\varphi, u) = (\varphi, Pu)_0$ se deduce

$$(\varphi, (P+k)u)_0 = (\varphi, Pu)_0 + k(\varphi, u)_0 = A(\varphi, u) + k(\varphi, u)_0 = (\lambda + k)(\varphi, u)_0$$

ceea ce justifică afirmația.

4.8.2. Proprietăți generale ale funcțiilor și valorilor proprii

În ipotezele făcute în 4.8.1 asupra funcționalei biliniare A, rezultă că valorile proprii sînt numere reale, deoarece dacă $u \in H_0^m(D_n)$ este o funcție proprie normată ($\|u\|_0 = 1$), pentru $\varphi = u$, din (4.79) se deduce

$$\lambda = A(u, u), \tag{4.79'}$$

egalitate care constituie legătura dintre funcțiile proprii ale problemei (4.76″) și valorile proprii corespunzătoare ; cum prin ipoteză $A(\varphi, u) \in \mathbb{R}$, neapărat $\lambda \in \mathbb{R}$.

Din definiție rezultă că valorile proprii sînt mărginite inferior de numărul real $-k_0$, deoarece din (4.78) și (4.79′) se deduce

$$\lambda = A(u, u) \geqslant k_1 \|u\|_m^2 - k_0 \|u\|_0^2 \geqslant -k_0^2 \|u\|_0^2 = -k_0\,;$$

iar particular, dacă $k_0 \leqslant 0$, valorile proprii sînt nenegative.

Proprietatea principală a funcțiilor proprii este proprietatea de ortogonalitate : dacă λ și μ sînt valori proprii distincte ale problemei în cauză, cărora le corespund funcțiile proprii u, respectiv v, atunci $(u, v)_0 = 0$, deci la valori proprii diferite vor corespunde funcții proprii ortogonale în $L_2(D_n)$; într-adevăr, deoarece

$$A(\varphi, u) = \lambda(\varphi, u)_0, \quad A(\psi, v) = \mu(\psi, v)_0,$$

scriind $\varphi = v$ și $\psi = u$, deoarece $A(v, u) = A(u, v)$ în baza simetriei funcționalei A, prin scădere se deduce $(\lambda - \mu)(u, v)_0 = 0$ și cum $\lambda \neq \mu$, neapărat $(u, v)_0 = 0$.

Dacă ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ este superior unităţii, adică acestei valori proprii îi vor corespunde cel puţin două funcţii proprii liniar independente, prin aplicarea procedeului de ortogonalizare, aceste funcţii proprii vor putea fi considerate de asemenea ortogonale.

În ipoteza că numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sînt valori proprii ale problemei la limită (4.76''), sînt valabile egalităţile

$$A(u_j, u_k) = \lambda_k\ \delta_{jk}, \quad j, k=1, 2, \ldots, \tag{4.79''}$$

în care $u_1, u_2, \ldots$ sînt funcţii proprii corespunzînd valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$; într-adevăr, pentru $j=k$ se deduce egalitatea (4.79') iar dacă $j \neq k$ se obţine din egalitatea de definiţie (4.79), pentru $\varphi = u_j$, $u = u_k$, $j \neq k$, $A(u_j, u_k) = \lambda_k (u_j, u_k)_0 = 0$ în baza ortogonalităţii funcţiilor proprii.

În baza acestor proprietăţi se constată că anumite proprietăţi esenţiale în fundamentarea metodei separării variabilelor (anume ortogonalitatea funcţiilor proprii, şirul valorilor proprii este real) care s-au obţinut în 4.4—4.7, în anumite cazuri speciale sînt valabile şi într-un cadru mai general.

4.8.3. Existenţa funcţiilor proprii

Vom arăta că în ipotezele din 4.8.1 pentru funcţionala biliniară A, se pot obţine o infinitate numărabilă de funcţii şi valori pentru problema la limită (4.76'').

Teorema 4.11. *Prima valoare proprie λ_1 a problemei la limită în cauză se obţine cu ajutorul următoarei relaţii de minim:*

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{\varphi \in H_m^0(D_n)\\ \|\varphi\|_0=1}} A(\varphi, \varphi), \tag{4.80}$$

iar minimul este efectiv atins pentru un element $u_1 \in H_0^m(D_n)$, $\|u_1\|_0 = 1$, care este funcţie proprie corespunzătoare valorii proprii λ_1.

⌜ Presupunînd $k_0 = 0$ (ceea ce nu constituie o restricţie), avem

$$A(\varphi, \varphi) \geqslant k_1 \|\varphi\|_m^2 \geqslant 0,$$

deci mulţimea de numere reale $\{A(\varphi, \varphi) \mid \varphi \in H_0^m(D_n)\}$, va fi mărginită inferior şi fie λ_1 marginea inferioară strictă a acestei mulţimi; avem $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \geqslant 0$. Fie $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ un şir minimizant din $H_0^m(D_n)$, adică

$$\varphi_j \in H_0^m(D_n),\ \|\varphi_j\|_0 = 1,\ \lim_{j\to\infty} A(\varphi_j, \varphi_j) = \lambda_1,\ j = 1, 2, \ldots.$$

iar pentru orice $\delta > 0$ se poate găsi $n_\delta \in \mathbb{N}$, astfel încît

$$\lambda_1 \leqslant A(\varphi_j, \varphi_j) \leqslant \lambda_1 + \delta, \quad j \geqslant n_\delta;$$

să notăm prin $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit din $H_0^m(D_n)$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$A\left(\frac{\varphi_j + \varepsilon\zeta_k}{\|\varphi_j + \varepsilon\zeta_k\|_0}, \frac{\varphi_j + \varepsilon\zeta_k}{\|\varphi_j + \varepsilon\zeta_k\|_0}\right) \geqslant \lambda_1,$$

deoarece λ_1 este valoarea minimă pentru A; în baza liniarităţii lui A în raport cu ambele argumente, se deduce inegalitatea

$$A(\varphi_j + \varepsilon\zeta_k, \varphi_j + \varepsilon\zeta_k) \geqslant \lambda_1 \|\varphi_j + \varepsilon\zeta_k\|_0^2$$

care se mai poate scrie şi sub forma

$$\varepsilon^2[A(\zeta_k, \zeta_k) - \lambda_1 \|\zeta_k\|_0^2] + 2\varepsilon[A(\varphi_j, \zeta_k) - \lambda_1(\varphi_j, \zeta_k)_0] +$$

$$+ [A(\varphi_j, \varphi_j) - \lambda_1\|\varphi_j\|_0^2] \geqslant 0,$$

şi deci conduce la inegalitatea

$$[A(\varphi_j, \varphi_k) - \lambda_1(\varphi_j, \zeta_k)_0]^2 \leqslant [A(\varphi_j, \varphi_j) - \lambda_1]\, A(\zeta_k, \zeta_k) - \lambda_1\|\zeta\|_0^2], \tag{4.80'}$$

deoarece $\|\varphi_j\|_0 = 1$ iar trinomul în ε trebuind să fie nenegativ; evident, coeficientul lui ε^2 este pozitiv, deoarece

$$A\left(\frac{\zeta_k}{\|\zeta_k\|_0}, \frac{\zeta_k}{\|\zeta_k\|_0}\right) \geqslant \lambda_1.$$

Deoarece şirul (ζ_k) este mărginit în $H_0^m(D_n)$, avem $\|\zeta_k\|_m \leqslant b$, b fiind independent de k şi deoarece $\|\zeta_k\|_0 \leqslant \|\zeta_k\|_m$, rezultă $\|\zeta_k\|_0 \leqslant b$, ceea ce antrenează, în baza mărginirii funcţionalei A,

$$|A(\zeta_k, \zeta_k) - \lambda_1 \|\zeta_k\|_0^2| \leqslant a \|\zeta_k\|_m^2 + \lambda_1 \|\zeta_k\|_0^2 \leqslant b(a + \lambda_1 b)$$

cu a definit prin (4.77''). Cum $A(\varphi_j, \varphi_j) \to \lambda_1$, din inegalitatea (4.80') se deduce

$$A(\varphi_j, \zeta_k) - \lambda_1 (\varphi_j, \zeta_k)_0 \to 0 \text{ cînd } j, k \to \infty. \tag{4.80''}$$

Deoarece

$$\|\varphi_j\|_m^2 \leqslant \frac{1}{k_1} A(\varphi_j, \varphi_j) < \frac{\lambda_1 + \delta}{k_1}, \quad j \geqslant n_\delta,$$

rezultă mărginirea şirului $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ în $H_0^m(D_n)$, $m \geqslant 1$, şi deci, în baza teoremei lui Rellich (vezi teorema (4.1)) va exista un subşir, pe care vom conveni să-l notăm tot prin (ζ_j) convergent în $H_0^0(D_n) = L_2(D_n)$, adică $\varphi_j \to u_1 \in L_2(D_n)$; scriind acum (4.80″) de două ori,

$$A(\varphi_j, \zeta_k) - \lambda_1(\varphi_j, \zeta_k)_0 \to 0 \text{ cînd } j \to \infty.$$

$$A(\varphi_{j'}, \zeta_k) - \lambda_1(\varphi_{j'}, \zeta_k)_0 \to 0 \text{ cînd } j' \to \infty,$$

prin scădere, rezultă

$$A(\varphi_j - \varphi_{j'}, \zeta_k) - \lambda_1(\varphi_j - \varphi_{j'}, \zeta_k)_0 \to 0 \quad \text{cînd } j,\ j' \to \infty,$$

sau, luînd $\zeta_k = \varphi_j - \varphi_{j'}$, $\left[\zeta_k \in H_0^m(D_n) \text{ şi } \|\zeta_k\|_m \leqslant \|\varphi_j\|_m + \|\varphi_{j'}\|_m < 2\sqrt{\frac{\lambda_1 + \delta}{k_1}}\right]$, se deduce

$$A(\varphi_j - \varphi_{j'}, \varphi_j - \varphi_{j'}) - \lambda_1\|\varphi_j - \varphi_{j'}\|_0^2 \to 0, \text{ cînd } j,\ j' \to \infty.$$

Şirul (φ_j), fiind convergent, va fi fundamental, ceea ce în baza ultimei relaţii antrenează

$$A(\varphi_j - \varphi_{j'}, \varphi_j - \varphi_{j'}) \to 0 \quad \text{cînd } j,\ j' \to \infty;$$

din inegalitatea $\|\varphi\|_m \leqslant \frac{1}{k_1} A(\varphi, \varphi)$ se deduce

$$\|\varphi_j - \varphi_{j'}\|_m \leqslant \frac{1}{k_1} A(\varphi_j - \varphi_{j'}, \varphi_j - \varphi_{j'}) \to 0 \text{ cînd } j,\ j' \to \infty,$$

ceea ce înseamnă că şirul (φ_j) va fi convergent şi în $H_0^m(D_n)$ iar în baza unicităţii limitei neapărat $\varphi_j \to u_1$ în $H_0^m(D_n)$, adică $u_1 \in H_0^m(D_n)$. Apoi, cum $\|\varphi_j\|_0 = 1$, rezultă prin trecere la limită $\|u_1\|_0 = 1$ iar din (4.80″) pentru $\zeta_k = \varphi_{j'}$, prin trecere la limită, $j' \to \infty$, se deduce

$$A(u_1, u_1) = \lambda_1\|u_1\|_0 = \lambda_1;$$

în fine, din (4.80″) pentru $\zeta_k = \varphi' \in H_0^m(D_n)$ rezultă prin trecere la limită şi egalitatea $A(\varphi, u_1) = \lambda_1(\varphi, u_1)_0$. ┘

Teorema următoare permite determinarea din aproape în aproape a funcţiilor şi valorilor proprii problemei în cauză.

Teorema 4.12. *Problema la limită* (4.76″) *admite o infinitate numărabilă de valori şi funcţii proprii în ipotezele în care este valabilă teorema* 4.11, *şirul real al valorilor proprii avînd* $+\infty$ *ca singur punct limită.*

┌ Să notăm prin M_2 subspaţiul (închis) al spaţiului Sobolev $H_0^m(D_n)$, unde $\varphi \in M_2$ dacă $\varphi \in H_0^m(D_n)$ iar $(\varphi, u_1)_0 = 0$, u_1 fiind funcţia proprie determinată prin teorema 4.11; atunci notînd

$$\lambda_2 = \inf_{\substack{\|\varphi\|_0=1\\ \varphi\in M_2}} A(\varphi, \varphi)$$

λ_2 va fi minimul funcţionalei A în M_2. Deoarece M_2 este un subspaţiu închis al lui $H_0^m(D_n)$, va fi el însuşi un spaţiu Hilbert ca şi $H_0^m(D_n)$ şi deci demonstraţia teoremei 4.11 se poate relua punct cu punct. Rezultă că acest minim este atins pentru $u_2 \in M_2$, $\|u_2\|_0 = 1$, iar $u_2 \neq u_1$ [deoarece în caz contrar relaţia de ortogonalitate a elementelor din M_2 pe $u_1 \in H_0^m(D_n)$ ar conduce la $(u_2, u_1)_0 = (u_2, u_2)_0 = \|u_2\|_0^2 = 0$, ceea ce contrazice $\|u_2\|_0 = 1$] iar în plus

$$A(\psi, u_2) = \lambda_2(\psi, u_2)_0$$

pentru orice $\psi \in M_2$; dacă arătăm că această ultimă egalitate rămîne valabilă cînd se înlocuieşte $\psi \in M_2$ prin $\varphi \in H_0^m(D_n)$, atunci se deduce că u_2 este funcţie proprie a problemei studiate. Or, dacă φ este un element arbitrar din $H_0^m(D_n)$, atunci $\psi = \varphi - a_1u_1$, $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 = (\varphi, u_1)_0$, va fi un element din M_2 deoarece $(\psi, u_1)_0 = (\varphi, u_1)_0 - a_1\|u_1\|_0^2 = 0$, pentru că $\|u_1\|_0 = 1$ şi deci, cum

$$A(\psi, u_2) = A(\varphi - a_1u_1, u_2) = A(\varphi, u_2) - a_1 A(u_1, u_2) = A(\varphi, u_2),$$

$$(\psi, u_2)_0 = (\varphi - a_1u_1, u_2)_0 = (\varphi, u_2)_0 - a_1(u_1, u_2)_0 = (\varphi, u_2)_0,$$

în baza egalităţii (4.79″) şi a relaţiei de ortogonalitate dintre u_1 şi u_2 rezultă din $A(\psi, u_2) = \lambda_2(\psi, u_2)_0$, egalitatea $A(\varphi, u_2) = \lambda_2(\varphi, u_2)_0$, $\varphi \in H_0^m(D_n)$. În plus, $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$, deoarece din $M_2 \subset H_0^m(D_n)$ se deduce

$$\min_{\varphi\in M_2} A(\varphi, \varphi) \geqslant \min_{\varphi\in H_0^m} A(\varphi, \varphi).$$

Deoarece u_1 şi u_2 sînt elemente determinate din $H_0^m(D_n)$, se poate construi subspaţiul (închis) $M_3 \subset H_0^m(D_n)$, astfel încît $\varphi \in M_3$

dacă $\varphi \in H_0^m(D_n)$ și $(\varphi, u_1)_0 = 0$, $(\varphi, u_2)_0 = 0$; repetînd raționamentele anterioare, se deduce că a treia valoare proprie λ_3 va coincide cu minimul funcționalei $A(\varphi, \varphi)$ pentru $\varphi \in M_3$, $\|\varphi\|_0 = 1$, acest minim fiind atins pentru $\varphi = u_3 \in M_3$, u_3 fiind funcție proprie iar $\lambda_3 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_1$. Din aproape în aproape se obțin toate valorile și funcțiile proprii în cauză și teorema va fi demonstrată dacă arătăm că $\lim \lambda_j = +\infty$; în orice caz, între λ_j și λ_{j+1} nu există valori proprii ale aceluiași probleme la limită; dacă am avea

$$\lambda_j < \lambda^* < \lambda_{j+1}, \; \lambda^* = A(u^*, u^*), \; A(\varphi, u^*) = \lambda^*(\varphi, u^*)_0$$

va rezulta

$$\lambda^* = A(u^*, u^*) = \inf_{\substack{\|\varphi\|_0 = 1 \\ \varphi \in M_{j+1}}} A(\varphi, \varphi) = \lambda_{j+1}$$

(deoarece funcția proprie u^* este ortogonală pe funcțiile proprii $u_1, \ldots, u_j$), ceea ce înseamnă $\lambda^* = \lambda_{j+1}$, deci se contrazice ipoteza $\lambda^* < \lambda_{j+1}$. Dacă $\lambda_j \to \lambda_0 \in \mathbb{R}$ (șirul valorilor proprii fiind nedescrescător, λ_0, dacă există, este unic determinat), am avea

$$\| u \|_m^2 \leqslant \frac{1}{k_1} A(u_j, u_j) = \frac{\lambda_j}{k_1} \to \frac{\lambda_0}{k_1},$$

ceea ce antrenează mărginirea șirului $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ în $H_0^m(D_n)$; teorema 4.1 arată că va exista un subșir $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ al acestui șir convergent în $L_2(D_n)$, dar în baza egalităților $\| u_{k_j} \|_0 = 1$ se deduce $\| u_{k_j} - u_{k_{j'}} \|_0^2 = 2$ dacă $j \neq j'$ și șirul nu este fundamental. Această contradicție arată că neapărat $\lambda_0 = +\infty$. ┘

4.8.4. Completitudinea șirului funcțiilor proprii

În ceea ce privește posibilitatea dezvoltării elementelor din $H_0^m(D_n)$ în serie de funcții proprii ale problemei la limită studiate aici, vom demostra rezultatul următor:

Teorema 4.12. *Dacă $f \in H_0^m(D_n)$, vor fi valabile relațiile:*

a) $\| g_k \|_m \to 0$ *cînd* $k \to \infty$, $g_k = f - \sum_{j=1}^{k} (f, u_j)_0 u_j$,

b) $\| f \|_0^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (f, u_j)_0^2$,

c) $A(f, f) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (f, u_j)_0$,

dacă $u_1, u_2, \ldots$ sînt funcțiile proprii ale problemei la limită în cauză.

┌ Notînd $a_j = (f, u_j)_0$, $j = 1, 2, \ldots$, șirul coeficienților Fourier, în baza ortogonalității șirului de funcții proprii $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$, seria $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2$ va fi convergentă (în baza inegalității lui Bessel); calculînd $A(g_k, g_k)$, $g_k = f - \sum_{j=1}^{k} a_j u_j$, folosind rezultatele din 4.8.2, găsim

$$A(g_k, g_k) = A(f, f) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j^2$$

și cum $A(g_k, g_k) \geqslant k_1 \| g_k \|_m^2 \geqslant 0$, se deduce

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j^2 \leqslant A(f, f),$$

ceea ce antrenează convergența seriei cu termeni nenegativi $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j^2$ iar în plus

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j^2 \leqslant A(f, f).$$

Pentru $l > k$ avem

$$k_1 \| g_l - g_k \|_m^2 \leqslant A(g_l - g_k, g_l - g_k) = \sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda_j a_j^2$$

pentru $k, l \geqslant N(\varepsilon)$ $\left(\text{în virtutea convergenței seriei } \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j^2\right)$, ceea ce conduce la convergența șirului $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ în $H_0^m(D_n)$ (care este un spațiu complet), deci $\lim_{k \to \infty} g_k = g \in H_0^m(D_n)$. Deoarece se verifică ușor că $(g_k, u_1)_0 = 0, \ldots, (g_k, u_k)_0 = 0$, rezultă $\frac{g_k}{\|g_k\|_0} \in M_{k+1}$, $M_1, M_2, \ldots$ fiind spațiile care apar în demonstrația teoremelor 4.10 și 4.11, ceea ce înseamnă

$$A\left(\frac{g_k}{\| g_k \|_0}, \frac{g_k}{\| g_k \|_0}\right) \geqslant \lambda_{k+1}$$

(valoarea minimă a funcționalei A în M_{k+1} fiind λ_{k+1}). Rezultă inegalitatea

$$\|g_k\|_0^2 \leqslant \frac{A(g_k, g_k)}{\lambda_{k+1}} = \frac{A(f,f) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j^2}{\lambda_{k+1}} \leqslant \frac{A(f,f)}{\lambda_{k+1}}$$

(seria $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j^2$ avînd termenii nenegativi are suma $\geqslant 0$) și deoarece $\lambda_k \to \infty$, avem $g_k \to 0$, adică $g = 0$ ($g = \lim g_k$). Prin urmare, ținînd seama de definiția șirului (g_k), rezultă

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j = \sum_{j=1}^{\infty} (f, u_j)_0 u_j,$$

ceea ce arată că punctul a) este justificat. Deoarece

$$\|g_k\|_0^2 = \|f\|_0^2 - \sum_{j=1}^{k} a_j^2,$$

din faptul că $\|g_k\|_0 \to 0$ se deduce egalitatea lui Parseval (punctul b); în fine, deoarece

$$k_1 \|g_k\|_m^2 \leqslant A(f,f) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j^2 = A(g_k, g_k) \leqslant a\|g_k\|_m^2,$$

în baza mărginirii funcționalei A, pentru $k \to \infty$, cum $g_k \to 0$ în $H_0^m(D_n)$, avem verificată și egalitatea de la punctul c). ┘

Prin urmare, șirul funcțiilor proprii pentru problema la limită studiată aici formează o bază ortonormală în spațiul Sobolev $H_0^m(D_n)$, seria Fourier $\sum_{j=1}^{\infty} (f, u_j)_0 u_j$ fiind convergentă în acest spațiu către f, dacă $f \in H_0^m(D_n)$; trebuie reținut faptul că această serie Fourier are coeficienții calculați cu ajutorul produsului scalar din $L_2(D_n)$, nu cu ajutorul produsului scalar din $H_0^m(D_n)$.

4.8.5. Proprietatea de minimax a valorilor proprii

De obicei, prin *minimax* se înțelege un principiu cu ajutorul căruia se determină valoarea optimă a unei aplicații cu valori reale, calculînd minimul (maximul) unei mulțimi convenabil alese de valori maxime (minime) ale aplicației date.

Teorema 4.13 (*Courant*). *Valoarea proprie λ_k a problemei la limită (4.76″) se poate obține direct cu ajutorul următoarei probleme de minimax:*

$$\lambda_k = \sup \inf A(\varphi, \varphi),$$

în care $\inf A(\varphi, \varphi)$ *se calculează pentru* $\varphi \in H_0^m(D_n)$, $\|\varphi\|_0 = 1$, $(\varphi, f_j)_0 = 0$, $j = 1, \ldots, k-1$, $f_1, \ldots, f_{k-1}$ *fiind elemente oarecare din* $L_2(D_n)$ *iar superiorul se calculează în raport cu mulțimea* $\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$.

┌ Cu alte cuvinte, notînd

$$\lambda_k(f_1, \ldots, f_{k-1}) = \inf A(\varphi, \varphi),$$

astfel încît $\varphi \in H_0^m(D_n)$, $\|\varphi\|_0 = 1$, $(\varphi, f_1)_0 = 0, \ldots, (\varphi, f_{k-1})_0 = 0$, pentru o alegere oarecare a funcțiilor $f_1, \ldots, f_{k-1}$ din $L_2(D_n)$, avem

$$\lambda_k = \sup_{\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}} \lambda_k(f_1, \ldots, f_{k-1}).$$

În particular, luînd $f_1 = u_1, \ldots, f_{k-1} = u_{k-1}$, teorema 4.11 arată că $\lambda_k(u_1, \ldots, u_{k-1}) = \lambda_k$, λ_k fiind valoarea proprie de indice k din șirul valorilor proprii ale problemei la limită în studiu; aceasta înseamnă că valoarea λ_k este atinsă efectiv și teorema va fi demonstrată dacă arătăm că

$$\lambda_k \geqslant \lambda_k(f_1, \ldots, f_{k-1}).$$

Altfel spus, dacă arătăm că pentru orice alegere a sistemului $\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$ verificînd condițiile specificate, avem $\lambda_k \geqslant A(\varphi, \varphi)$, cu atît mai mult

$$\lambda_k \geqslant \lambda_k(f_1, \ldots, f_{k-1}) = \inf A(\varphi, \varphi).$$

Presupunem

$$\varphi = \sum_{j=1}^{k} c_j u_j,$$

unde $u_1, \ldots, u_k$ sînt funcțiile proprii care corespund valorilor proprii $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k$, ceea ce implică $\varphi \in H_0^m(D_n)$, deoarece $u_1, \ldots, u_k \in H_0^m(D_n)$ iar constantele $c_1, \ldots, c_k$ se aleg astfel încît $\|\varphi\|_0 = 1$, adică

$$c_1^2 + \ldots + c_k^2 = 1 \tag{4.81}$$

[în baza relațiilor de ortogonalitate $(u_j, u_{j'})_0 = \delta_{jj'}$] iar $(\varphi, f_1)_0 = 0, \ldots, (\varphi, f_{k-1}) = 0$ pentru o alegere oarecare a sistemului de funcții $\{f_1, \ldots, f_{k-1}\} \subset L_2(D_n)$, adică

$$\sum_{j=1}^{k} c_j(u_j, f_1)_0 = 0, \ldots, \sum_{j=1}^{k} c_j(u_j, f_{k-1})_0 = 0.$$

Or ultimele egalități pot fi interpretate ca un sistem liniar algebric în $c_1, \ldots, c_k$ format cu $k-1$ ecuații, deci compatibil și se aleg aceste soluții astfel încît să se verifice (4.81); calculînd $A(\varphi, \varphi)$, avem

$$A(\varphi, \varphi) = A\left(\sum_{j=1}^{k} c_j u_j, \sum_{j'=1}^{k} c_{j'} u_{j'}\right) = \sum_{j, j'=1}^{k} c_j c_{j'} A(u_j, u_{j'}) = \sum_{k=1}^{k} \lambda_j c_j^2,$$

deoarece $A(u_j, u_{j'}) = \lambda_j \delta_{jj'}$ (vezi 4.79″). Cum $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k$, se deduce

$$A(\varphi, \varphi) \leqslant \lambda_k \sum_{j=1}^{k} c_j^2 = \lambda_k,$$

utilizînd condiția (4.81). ┘

Ca aplicație la teorema lui Courant 4.13 să vedem care sînt implicațiile sale asupra șirului de valori proprii în situația în care domeniul D_n se înlocuiește cu D_n^* astfel încît $D_n^* \subset D_n$, expresia analitică a operatorului diferențial L și a condițiilor la limită **B** rămînînd nemodificate.

Teorema 4.14. *În cadrul aceleiași probleme la limită, valoarea proprie λ_k^* pentru un subdomeniu D_n^* al domeniului D_n nu este inferioară valorii proprii λ_k (corespunzătoare domeniului D_n).*

┌ Considerînd spațiile $H_0^m(D_n)$ și $H_0^m(D_n^*)$, dacă $\varphi \in H_0^m(D_n)$, luînd $\varphi^*(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ dacă $\mathbf{x} \in D_n^*$ și $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ dacă $\mathbf{x} \in D_n \setminus D_n^*$ (altfel spus, dacă $\chi_{D_n^*}$ este funcția caracteristică a domeniului D_n^*, deci funcția egală cu unitatea pentru $\mathbf{x} \in D_n^*$ și nulă pentru $\mathbf{x} \notin D_n^*$, atunci $\varphi^* = \varphi \chi_{D_n^*}$) avem $\varphi^* \in H_0^m(D_n)$; pentru un sistem $\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$ oarecare de elemente din $L_2(D_n)$ avem

$$\lambda_k^*(f_1, \ldots, f_{k-1}) = \inf_{\substack{\varphi^* \in H_0^m(D_u^*) \\ \|\varphi^*\|_0 = 1 \\ (\varphi^*, f_j)_0 = 0}} A(\varphi^*, \varphi^*) \geqslant \inf_{\substack{\varphi \in H_m^0(D_n) \\ \|\varphi\|_0 = 1 \\ (\varphi, f_j)_0 = 0}} A(\varphi, \varphi) = \lambda_k(f_1, \ldots, f_{k-1}),$$

deoarece $\inf A(\varphi^*, \varphi^*)$ în ipotezele $\varphi^* \in H_0^m(D_n^*), \|\varphi^*\|_0 = 1, (\varphi^*, f_j)_0 = 0$ se poate scrie ca fiind egal cu $\inf A(\varphi, \varphi)$ cu $\varphi \in H_0^m(D_n), \|\varphi\|_0 = 1,$

$(\varphi, f_j)_0 = 0$, $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ dacă $\mathbf{x} \in D_n \setminus D_n^*$; dar această ultimă margine inferioară nu poate fi mai mică decît $\inf A(\varphi, \varphi)$ în condițiile $\varphi \in H_0^m(D_n)$, $\|\varphi\|_0 = 1$, $(\varphi, f_j)_0 = 0$, deoarece apare o condiție suplimentară ($\varphi(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in D_n \setminus D_n^*$) care restrînge mulțimea de definiție inițială și drept consecință inferiorul nu poate descrește. Așadar, din (4.81′) se deduce

$$\sup_{\{f_j\}} \lambda_k(f_1, \ldots f_{k-1}) \geqslant \sup_{\{f_j\}} \lambda_k(f_1, \ldots, f_{k-1}),$$

adică $\lambda_k^* \geqslant \lambda_k$, înțelegînd prin $\{f_j\}$ mulțimea $\{f_1, \ldots, f_{k-1}\}$. ┘

4.9. Probleme la limită Sturm-Liouville

4.9.1. Generalități

Prin *problemă* (sau *sistem*) *la limită Sturm-Liouville* se înțeleg acele probleme în care operatorul diferențial P este de forma

$$-Py = \frac{1}{\rho(x)}\left(\frac{d}{dx}[p(x)\,y'] - q(x)\,y\right) \tag{4.82}$$

în care $\rho, p, p', q \in C^0([a, b])$, $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $x \in [a, b]$, iar condițiile la limită sînt

$$\begin{aligned} U_1(y) &= \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0, \\ U_2(y) &= \beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0, \end{aligned} \tag{4.82′}$$

în ipoteza că numerele reale $\alpha_1, \ldots, \beta_4$ determină matricea

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix}$$

care are rangul doi. Determinarea funcțiilor și valorilor proprii ale problemei (4.82), (4.82′) conduce la integrarea ecuației diferențiale de ordinul al doilea

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)\,y + \lambda\rho(x)\,y = 0, \tag{4.82″}$$

soluţiile nebanale ale acestei trebuind să verifice condiţiile la limită (4.82'').

În ipoteza $\rho(x) = 1$ iar $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = 0$, existenţa funcţiilor şi valorilor proprii se poate justifica cu ajutorul consideraţiilor din 3.8, deoarece funcţionala biliniară $A(\varphi, \psi)$ corespunzătoare se scrie

$$A(\varphi, \psi) = \int_a^b [p(x)\, \varphi'\psi' + q(x)\, \varphi\psi]\, dx, \tag{4.83}$$

dacă se integrează prin părţi şi se ţine seama ca $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ φ fiind funcţie-test; din (4.83) se vede imediat că A este simetrică şi cum

$$|A(\varphi, \psi)| \leqslant \int_a^b [p(x)\,|\varphi'|\,|\psi'| + |q(x)|\,|\varphi|\,|\psi|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant a^* \int_a^b (|\varphi'|\,|\psi'| + |\varphi|\,|\psi|)\, dx = a\,(|\varphi|\ |\psi|)_1$$

cu $a^* = \max\limits_{x \in [a, b]} \{p(x), |q(x)|\}$ şi $(f, g)_1 = \int_b^a (f' \cdot g' + f \cdot g)\, dx$, în baza inegalităţii lui Schwartz, $|(g, f)_1| \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$, se deduce

$$|A(\varphi, \psi)| \leqslant a^* \|\varphi\|_1\, \|\psi\|_1,$$

adică A este o funcţională mărginită în $H_0^1([a, b])$. Scriind

$$0 < \underline{p} \leqslant p(x) \leqslant \bar{p},\ \underline{q} \leqslant q(x) \leqslant \bar{q},\ x \in [a, b],$$

$\underline{p}$, $\underline{q}$, $\bar{p}$, $\bar{q} \in \mathbb{R}$ (avem $\underline{p} > 0$ deoarece $p(x) > 0$, $x \in [a, b]$), găsim

$$A(\varphi, \varphi) = \int_a^b [p(x)\, \varphi'^2 + q(x)\varphi^2]\, dx \geqslant \underline{p}\int_a^b \varphi'^2\, dx + \underline{q}\int_a^b \varphi^2\, dx =$$

$$= \underline{p}\|\varphi\|_1^2 + (\underline{q} - \underline{p})\,\|\varphi\|_0^2,$$

iar cu notaţile $k_1 = \underline{p} > 0$ şi $k_0 = \underline{p} - \underline{q}$ rezultă coercivitatea funcţionalei A în spaţiul Sobolev $H_0^1([a, b])$ (sau chiar în spaţiul $H^1([a, b])$). Aşadar, poate fi considerată ca demonstrată

Teorema 4.15. *În ipotezele de mai sus, operatorul diferenţial* (4.82) *admite în* $H_0^1([a, b])$ *o infinitate numărabilă de funcţii proprii* $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, ... *corespunzînd valorilor proprii* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \leqslant \ldots$, $\lim \lambda_n = +\infty$, *al căror ordin de multiplicitate este cel mult egal cu doi* [*deoarece ecuaţia* (4.82'') *este de ordinul al doilea*]; *şirul funcţiilor proprii este complet în* $H_0^1([a, b])$, *seria Fourier pentru* $f \in H_0^1([a, b])$ *avînd forma*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, y_n)_0\, y_n$$

şi fiind convergentă (către f) în norma din $H_0^1([a, b])$.

Dacă $\rho(x) \neq 1$, teorema 4.15 rămîne valabilă cu condiţia utilizării produsului scalar cu pondere ρ în locul produsului scalar $(f, g)_0$; în plus, este uşor de văzut că ordinul de multiplicitate al valorilor proprii este egal cu unitatea, deoarece dacă valorii proprii λ_n îi corespund funcţiile proprii y_{n1} şi y_{n2} liniar independente, orice soluţie $y = y(x)$ a ecuaţiei (4.82''), pentru $\lambda = \lambda_n$, va fi o combinaţie liniară a acestor soluţii, deci $y(a) = 0$ şi $y(b) = 0$, ceea ce contrazice teorema de existenţă a problemei Cauchy $y(a) = y_a$, $y'(a) = y'_a$ cu y_a, y'_a orice numere reale dorim.

În baza teoremei 4.2 (lema lui Sobolev) rezultă că funcţiile proprii pot fi considerate funcţii continue pentru $x \in [a, b]$ şi ulterior vom arăta că în realitate y_n are şi proprietăţi de diferenţiabilitate.

Cu ajutorul teoremei lui Courant (vezi teorema 4.13) se pot obţine unele informaţii suplimentare privind şirul valorilor proprii; astfel, dacă în locul ecuaţiei diferenţiale (4.82'') se consideră ecuaţia

$$\frac{d}{dx}\,[p^*(x)\, y'] - q^*(x)\, y + \lambda^* \rho^*(x)]y = 0, \tag{4.84}$$

atunci în condiţiile la limită $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ vom avea

$$\lambda_n \leqslant \lambda_n^*, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.84'}$$

dacă $p(x) \leqslant p^*(x)$, $q(x) \leqslant q^*(x)$, $\rho^*(x) \leqslant \rho(x)$, $x \in [a, b]$. Într-adevăr, presupunînd iniţial $\rho^* = \rho$, utilizînd funcţionala

$$A^*(\varphi, \psi) = \int_a^b (p^*\, \varphi'\, \psi' + q^*\, \varphi\psi)\, dx,$$

găsim $A(\varphi, \psi) \leqslant A^*(\varphi, \psi)$ [A fiind definită prin (4.83)] şi deci

$$\inf A(\varphi, \psi) \leqslant \inf A^*(\varphi, \psi)$$

în condițiile $\varphi \in H_0^1([a, b])$, $\|\varphi\|_\rho = 1$, $(\varphi, f_j)_\rho = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, ceea ce înseamnă

$$\lambda_n(f_1, \ldots, f_{n-1}) \leqslant \lambda_n^*(f_1, \ldots, f_{n-1}),$$

iar trecînd la marginea superioară, rezultă $\lambda_n \leqslant \lambda_n^*$, $n \in \mathbb{N}$. Presupunînd $p^* = p$, $q^* = q$ și $\rho^*(x) \leqslant \rho(x)$, $x \in [a, b]$, vom avea

$$\frac{\mathrm{A}(\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\rho^*}^2} \geqslant \frac{\mathrm{A}(\varphi, \psi)}{\|\varphi\|_\rho^2}, \tag{4.84''}$$

deoarece

$$\|\varphi\|_{\rho^*}^2 = \int_a^b \rho^*(x)\, \varphi^2(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \rho(x)\, \varphi^2(x)\, \mathrm{d}x = \|\varphi\|_\rho^2;$$

dar nu se poate afirma că limitele inferioare în inegalitatea (4.84'') stau în aceeași relație de ordine, deoarece condițiile în care se obțin aceste limite nu sînt aceleași: în membrul întîi în (4.84'') teorema lui Courant pretinde $(\varphi, f_j)_{\rho^*} = 0$, pe cînd în membrul al doilea aceeași teoremă cere să fie $(\varphi, f_j)_\rho = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Ținînd însă seamă că sistemul de funcții $\{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ este arbitrar, vom putea considera drept condiții suplimentare pentru $\dfrac{\mathrm{A}(\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|_{\rho^*}^2} = \mathrm{A}\left(\dfrac{\varphi}{\|\varphi\|_{\rho^*}}, \dfrac{\varphi}{\|\varphi\|_{\rho^*}}\right)$ condițiile $(\varphi, g_j)_{\rho^*} = 0$, cu $\{g_1, \ldots, g_{n-1}\}$ un sistem oarecare de funcții din $L_2([a, b])$; în particular, pentru $g_j = \dfrac{\rho}{\rho^*} f_j$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ avem

$$(\varphi, g_j)_{\rho^*} = \int_a^b \rho^* \varphi g_j \,\mathrm{d}x = \int_a^b \rho \varphi f_j \,\mathrm{d}x = (\varphi, f_j)_\rho, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

iar cum $\rho^* \in C^0([a, b])$, $\rho^*(x) > 0$, avem $g_j \in L_2([a, b])$ dacă $f_j \in L_2([a, b])$ și reciproc. În acest mod, ambilor membri din (4.84'') li se atașează aceleași condiții suplimentare, deci

$$\lambda_n(f_1, \ldots, f_n) \leqslant \lambda_n^*(g_1, \ldots, g_n)$$

și, prin urmare, $\lambda_n \leqslant \lambda_n^*$.

O consecință directă a acestor rezultate este exprimată prin următoarele inegalități:

$$\alpha_1 n^2 + \beta_1 \leqslant \lambda_n \leqslant \alpha_2 n^2 + \beta_2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

cu $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ depinzînd pe p, q și ρ, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ fiind șirul valorilor proprii pentru problema la limită în cauză. Într-adevăr, dacă

$$0 < \underline{p} \leqslant p(x) \leqslant \bar{p}, \quad \underline{q} \leqslant q(x) \leqslant \bar{q}, \; 0 < \underline{\rho} \leqslant \rho(x) \leqslant \bar{\rho}, \quad x \in [a, b],$$

ecuațiile diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\underline{p}\, y') - \underline{q} y + \underline{\lambda} \bar{\rho} y = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\bar{p} y') - \bar{q} y + \bar{\lambda} \underline{\rho} y = 0$$

vor avea coeficienți constanți iar în condițiile $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ vor admite valorile proprii $\underline{\lambda}_n$, $\bar{\lambda}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, unde

$$\frac{\underline{\lambda}_n \bar{\rho} - \underline{q}}{\underline{p}} = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}, \quad \frac{\bar{\lambda}_n \underline{\rho} - \bar{q}}{\bar{p}} = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

din care se deduc

$$\underline{\lambda}_n = \frac{\pi^2 \underline{p} n^2}{\bar{\rho}(b-a)^2} + \frac{\underline{q}}{\bar{\rho}} = \alpha_1 n^2 + \beta_1, \quad \bar{\lambda} = \frac{\pi^2 \bar{p} n^2}{\underline{\rho}(b-a)^2} + \frac{\bar{q}}{\underline{\rho}}\, \alpha_2 n^2 + \beta_2$$

iar afirmația făcută rezultă din inegalitățile $\underline{\lambda}_n \leqslant \lambda_n \leqslant \bar{\lambda}_n$.

În particular, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n'}$, unde $\lambda_1', \lambda_2', \ldots$ sînt valorile proprii nenule ale problemei la limită în discuție, este convergentă, admițînd ca serie majorantă seria convergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\alpha_1 n^2 + \beta_1}$.

În concluzie, se poate afirma că proprietățile funcțiilor și valorilor proprii pentru problema la limită $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ atașată ecuației (4.82'') sînt complet asemănătoare proprietăților funcțiilor și valorilor proprii pentru condițiile la limită atașate ecuației diferențiale simple $y'' + \lambda y = 0$.

4.9.2. Funcția Green a sistemelor Sturm-Liouville

Vom nota cele două condiții la limită (4.82') prin $\mathbf{U}(y)$ și fie problema la limită

$$-\mathbf{P}y + \lambda \rho y = f, \quad \mathbf{U}(y) = 0, \tag{4.85}$$

cu $f \in C^0([a, b])$ și $\lambda \in \mathbb{R}$, notînd de data aceasta

$$\mathrm{P}y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)y'] + q(x)y. \tag{4.85'}$$

Fie $\varphi_1 = \varphi_1(x, \lambda)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x, \lambda)$ soluțiile ecuației $\mathrm{P}y = \lambda\rho y$ care verifică datele Cauchy

$$\varphi_1(c, \lambda) = 1, \quad \varphi_1'(c, \lambda) = 0,$$
$$\varphi_2(c, \lambda) = 0, \quad \varphi_2'(c, \lambda) = 1,$$

c fiind un punct arbitrar din intervalul $[a, b]$; utilizînd teoremele de existență și unicitate ale problemei Cauchy pentru ecuații diferențiale de ordinul al doilea, precum și teorema de dependență a soluțiilor ecuațiilor diferențiale de parametri, rezultă că φ_1 și φ_2 sînt funcții de clasă C^2 în raport cu variabila $x \in [a, b]$ și funcții întregi (adică dezvoltabile în serie Taylor cu raza de convergentă infinită) în raport cu parametrul λ pentru x fixat. Soluțiile φ_1 și φ_2 sînt liniar independente (deoarece wronskianul lor în punctul $x \in [a, b]$ este egal cu unitatea) și deci orice soluție a ecuației diferențiale $\mathrm{P}y = \lambda\rho y$ se va putea scrie sub forma

$$y(x, \lambda) = C_1\varphi_1(x, \lambda) + C_2\varphi_2(x, \lambda); \tag{4.86}$$

dacă dorim să găsim funcțiile proprii ale probemei la limită

$$\mathrm{P}y = \lambda\rho y, \quad \mathbf{U}(y) = 0,$$

va fi suficient să determinăm constantele C_1 și C_2 astfel încît să avem $\mathbf{U}(y) = 0$, iar $|C_1| + |C_2| > 0$. Prin urmare, C_1 și C_2 vor fi soluțiile nebanale ale sistemului liniar și omogen

$$C_1 U_1(\varphi_1) + C_2 U_1(\varphi_2) = 0,$$
$$C_1 U_2(\varphi_1) + C_2 U_2(\varphi_2) = 0 \tag{4.86'}$$

și pentru aceasta este necesar și suficient ca determinantul

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(\varphi_1) & U_1(\varphi_2) \\ U_2(\varphi_1) & U_2(\varphi_2) \end{vmatrix}$$

să fie nul; deoarece φ_1 și φ_2 sînt funcții întregi pentru orice $x \in [a, b]$, U_1 și U_2 vor fi de asemenea funcții întregi în raport cu

λ și aceeași proprietate o va avea determinantul Δ. Cum o funcție întreagă admite, în planul complex $\mathbb{C}$, cel mult o infinitate numărabilă de zerouri, avînd ca singur punct de acumulare $\lambda = \infty$, se deduce că soluția (4.86) va fi nenulă numai dacă $\lambda = \lambda_j$, $\Delta(\lambda_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots$; în consecință, zerourile funcției Δ în planul complex $\mathbb{C}$ vor fi valorile proprii ale problemei Sturm-Liouville considerate iar soluțiile $C_1^{(j)}$ și $C_2^{(j)}$ ale sistemului (4.86') înlocuite în (4.86) vor defini funcțiile proprii corespunzătoare valorii proprii λ_j.

Calculînd wronskianul ω al funcțiilor φ_1 și φ_2, găsim

$$\omega(x) = \exp\left[-\int_c^x \frac{p'(t)}{p(t)}\,\mathrm{d}t\right]\omega(c) = \frac{p(c)}{p(x)},$$

deci $\omega(x) > 0$, $x \in [a, b]$ și, în plus, acest wronskian nu depinde de λ. Cu ajutorul funcțiilor φ_1, φ_2 și a wronskianului ω să definim funcția $K = K(x, \xi, \lambda)$ prin

$$K(x, \xi, \lambda) =$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < \xi, \\ \dfrac{1}{p(\xi)\omega(\xi)}[\varphi_1(\xi, \lambda)\,\varphi_2(x, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)\,\varphi_2(\xi, \lambda)], & \text{dacă } x \geqslant \xi, \end{cases}$$

care posedă următoarele proprietăți:

— este o funcție întreagă în raport cu parametrul λ, pentru x și ξ fixați;

— este continuă pentru $x, \xi \in [a, b]$ (deoarece, din definiție cum $p(\xi)\,\omega(\xi) > 0$, neapărat K este continuă pentru $x < \xi$ și $x > \xi$ separat, deoarece $K(\xi-, \xi, \lambda) = 0$, $K(\xi+, \xi, \lambda) = 0$, deci și $K(x, x-, \lambda) = 0$, $K(x, x+, \lambda) = 0$, rezultă continuitatea lui K și pentru $x = \xi$);

— în raport cu $x \in\,]a, b[$ se verifică ecuația $\mathrm{P}K = \lambda\rho K$ (într-adevăr, dacă $x < \xi$, $K = 0$, deci $\mathrm{P}K = \lambda\rho K$ iar dacă $x \geqslant \xi$, avem $\mathrm{L}K = \lambda\rho K$, deoarece funcțiile $\varphi_1(x, \lambda)$ și $\varphi_2(x, \lambda)$ au această proprietate);

— integrala $\int_b^b K(x, \xi, \lambda) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ cu parametri, pentru $f \in C^0([a, b])$, verifică ecuația diferențială $(pu')' - qu + \lambda\rho u = f$; într-adevăr, notînd

$$u(x) = \int_a^b K(x, \xi, \lambda) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

deoarece $K = 0$ pentru $\xi > x$, se deduce

$$u(x) = \int_a^x K(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi, \tag{4.88}$$

deci

$$u'(x) = \int_a^x \frac{\partial K(x, \xi, \lambda)}{\partial x} f(\xi)\, d\xi + K(x, x-, \lambda) f(x) =$$
$$= \int_a^x \frac{\partial K(x, \xi, \lambda)}{\partial x} f(\xi)\, d\xi,$$

deoarece $K(x, x-, \lambda) = 0$. Apoi, după înmulţire cu $p(x)$ şi derivare în raport cu x, găsim

$$\frac{d}{dx}[p(x) u'(x)] = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial K(x, \xi, \lambda)}{\partial x}\right] f(\xi)\, d\xi +$$
$$+ p(x) \frac{\partial K(x, x-, \lambda)}{\partial x} f(x).$$

Cum pentru $\xi < x$ avem

$$\frac{\partial K(x, \xi, \lambda)}{\partial x} = \frac{1}{p(\xi)\,\omega(\xi)}\left[\varphi_1(\xi, \lambda)\frac{\partial \varphi_2(x, \lambda)}{\partial x} - \varphi_2(\xi, \lambda)\frac{\partial \varphi_1(x, \lambda)}{\partial x}\right],$$

se obţine $\frac{\partial K(x, x-, \lambda)}{\partial x} = \frac{1}{p(x)\,\omega(x)}\,\omega(x) = \frac{1}{p(x)}$ şi deci $p(x)\frac{\partial K(x, x-, \lambda)}{\partial x} f(x) = f(x)$; rezultă

$$\frac{d}{dx}[p(x) u'(x)] = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial K(x, \xi, \lambda)}{\partial x}\right] f(\xi)\, d\xi + f(x);$$

calculînd expresia $(pu')' - qu$, găsim

$$\frac{d}{dx}[p(x) u'(x)] - q(x) u + \lambda\rho(x) u = \int_a^x \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial K(x, \xi, \lambda)}{\partial x}\right] -\right.$$
$$\left. - [q(x) - \lambda\rho(x)] K(x, \xi, \lambda)\right) f(\xi)\, d\xi + f(x) = f(x),$$

deoarece pentru $\xi < x$ avem $\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial K}{\partial x}\right) - qK + \lambda\rho K = 0.$

Cu alte cuvinte, funcţia u definită prin (4.88) va fi o soluţie a ecuaţiei $-\mathrm{P}y + \lambda\rho y = f$ şi pentru a rezolva problema (4.85) mai trebuie verificate condiţiile la limită $\mathbf{U}(y) = 0$, deoarece o soluţie a ecuaţiei $-\mathrm{P}y + \lambda\rho y = 0$ se scrie sub forma

$$y(x, \lambda) = C_1\varphi_1(x, \lambda) + C_2\varphi_2(x, \lambda) + K(x, \xi, \lambda),$$

vom nota prin $G = G(x, \xi, \lambda)$ acea soluţie care verifică şi condiţiile $\mathbf{U}(G) = 0$, deci constantele C_1 şi C_2 vor fi obţinute din sistemul algebric

$$\begin{aligned} C_1 U_1(\varphi_1) + C_2 U_1(\varphi_2) &= -U_1(K), \\ C_1 U_2(\varphi_1) + C_2 U_2(\varphi_2) &= -U_2(K). \end{aligned} \tag{4.86''}$$

Comparînd cu sistemul (4.86′), C_1 şi C_2 vor fi unic determinaţi numai dacă parametrul λ nu coincide cu un zero al funcţiei Δ, deci numai dacă λ nu este o valoare proprie a problemei la limită (4.85); cu această ipoteză, funcţie G, numit *funcţia Green* a problemei la limită va fi unic determinată şi va avea forma

$$G(x, \xi, \lambda) = C_1(\lambda, \xi)\,\varphi_1(x, \lambda) + C_2(\lambda, \xi)\,\varphi_2(x, \lambda) + K(x, \xi, \lambda)$$

cu C_1 şi C_2 soluţii ale sistemului (4.86″) (care evident depind de λ şi ξ). Să calculăm $\int_a^b G(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi$; avem

$$\int_a^b G(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi = \int_a^b K(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi + c_1(\lambda)\,\varphi_1(x, \lambda) + c_2(\lambda)\,\varphi_2(x, \lambda).$$

cu

$$c_1(\lambda) = \int_a^b C_1(\lambda, \xi) f(\xi)\, d\xi, \quad c_2(\lambda) = \int_a^b C_2(\lambda, \xi) f(\xi)\, d\xi$$

şi cum φ_1 şi φ_2 vor verifica ecuaţia $(py')' - qy + \lambda\rho y = 0$, rezultă că funcţia

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi$$

va fi o soluţie a problemei la limită (4.85), condiţiile la limită $\mathbf{U}(y) = 0$ fiind automat verificate deoarece $\mathbf{U}(G) = 0$ iar

$$\mathbf{U}(y) = \int_a^b (\mathbf{U}G) f(\xi)\, d\xi = 0.$$

Prin urmare, avem rezultatul următor:

Teorema 4.16. *Dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ nu este o valoare proprie a problemei la limită*

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,y'] - q(x)\,y + \lambda\rho(x)y = 0, \quad \mathbf{U}(y) = 0,$$

atunci soluția ecuației

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,y'] - q(x)\,y + \lambda\rho(x)\,y = f(x)$$

care verifică aceleași condiții la limită este unic determinată și se poate scrie sub forma

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi, \lambda)\,f(\xi)\,d\xi, \tag{4.89}$$

dacă $f \in C^0([a, b])$, în ipoteza că $G : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este funcția Green a problemei la limită în cauză.

⌈ Rămîne de justificat doar unicitatea acestei soluții care se obține imediat prin absurd: dacă $z \in C^2([a, b])$ verifică aceleași condiții ca și soluția y, diferența $v = y - z$ va verifica ecuația omogenă

$$\frac{d}{dx}[p\,v'] - qv + \lambda\rho v = 0$$

și condițiile $\mathbf{U}(v) = 0$; deoarece $\lambda \in \mathbb{C}$ nu este o valoare proprie a problemei date, singura soluție posibilă este $v = 0$, deci $x = z$. Celelalte afirmații au fost justificate anterior. ⌋

Luind în considerație proprietățile funcției K deduse mai sus și de legătura dintre funcțiile K și G, vom condensa proprietățile funcției Green în rezultatul următor:

Teorema 4.17. *Dacă λ nu este o valoare proprie pentru problema la limită*

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,y'] - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \qquad \mathbf{U}(y) = 0,$$

atunci există o singură funcție $G : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $G = G(x, \xi, \lambda)$, care pentru orice $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$, (λ_n) fiind șirul valorilor proprii ale sistemului Sturm-Liouville considerat, are următoarele proprietăți:

1) *G este funcție continuă pentru $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant \xi \leqslant b$;*

2) *$\dfrac{\partial G}{\partial x}$ și $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ sînt funcții continue pentru $a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b$, ca și pentru $a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b$;*

3) *pentru x și ξ fixați are loc egalitatea*

$$\frac{\partial G(\xi +, \xi, \lambda)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi -, \xi, \lambda)}{\partial x} = \frac{1}{p(\xi)};$$

4) *în raport cu variabila x se verifică ecuația*

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{\partial G}{\partial x}\right] - q(x)\,G + \lambda\rho\,(x)\,G = 0$$

dacă $x \neq \xi$;

5) *pentru $a \leqslant \xi \leqslant b$, în raport cu x, avem $\mathbf{U}G = 0$;*

b) *soluția problemei la limită considerate este dată prin egalitatea* (4.89).

Exemple. 15. Dacă $-Py = y''$ și $\mathbf{U}(y) = [y(a), y(b)]$, deoarece $\lambda = 0$ nu este valoare proprie a problemei în cauză (soluția ecuației $y'' = 0$ care verifică $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ este $y(x) = 0$, $x \in [a, b]$), funcția Green $G(x, \xi) = G(x, \xi, 0)$ se obține cu ajutorul teoremei 4.17: se deduce

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1(\xi)\,x + C_2(\xi), & x < \xi, \\ C_3(\xi)\,x + C_4(\xi), & x > \xi, \end{cases}$$

(deoarece funcțiile 1 și x sînt soluții liniar independente ale ecuației $y'' = 0$ iar pentru $x = \xi$, $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ avînd o discontinuitate, trebuie scrise două expresii pentru G); pentru a verifica condițiile la limită, se presupune ξ fixat, iar $G(a, \xi) = 0$ înseamnă $C_1(\xi)a + C_2(\xi) = 0$, pe cînd $G(b, \xi) = 0$ înseamnă $C_3(\xi)\,b + C_4(\xi) = 0$. Aceste egalități, împreună cu condiția de continuitate $G(\xi+, \xi) = G(\xi-, \xi)$, adică

$$C_1(\xi)\,\xi + C_2(\xi) = C_3(\xi)\xi + C_4(\xi)$$

și condiția de salt

$$\frac{\partial G(\xi+, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial G(\xi-, \xi)}{\partial x} = 1,$$

deoarece $p(x) = 1$, adică $C_3(h) - C_1(\xi) = 1$, se formează un sistem algebric care determină unic pe C_1, C_2, C_3 și C_4. Găsim

$$C_1(\xi) = \frac{\xi - b}{b - a}, \quad C_2(\xi) = \frac{a(b - \xi)}{b - a}, \quad C_3(\xi) = \frac{\xi - a}{b - a}, \quad C_4(\xi) = \frac{b(a - \xi)}{b - a},$$

deci

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}[x(\xi - b) + a(b-\xi)], & a \leqslant x < \xi \leqslant b, \\ \frac{1}{b-a}[x(\xi - a) + b(a-\xi)], & a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

16. Dacă $-\mathrm{P}y = y'' + a^2 y$, $a \neq 0$ și $\mathbf{U}(y) = [y(0), y(1)]$, $\lambda = 0$, nu este o valoare proprie; după modelul de la exemplul 24 rezultă următoarea funcție Green;

$$G(x, \xi, 0) = \begin{cases} \frac{1}{a \sin a} \sin(ax) \sin[x(1-\xi)], & 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant 1, \\ \frac{1}{a \sin a} \sin(a\xi) \sin[a(1-x)], & 0 \leqslant \xi < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Notăm prin $G(x, \xi)$ funcția Green pentru $\lambda = 0$ ($\lambda = 0$ poate fi întotdeauna presupusă nefăcînd parte din șirul valorilor proprii ale unui sistem Sturm-Liouville, deoarece în caz contrar se poate lua în considerație operatorul $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P} + c$ cu $c \in \mathbb{R}$ convenabil ales astfel încît P_1 să nu aibă $\lambda = 0$ ca valoare proprie); în acest mod orice soluție ordinară a ecuației

$$-\mathrm{P}y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)y'] - q(x)y = f(y)$$

care verifică condițiile la limită $\mathbf{U}(y) = 0$ se poate scrie sub forma integrală

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \qquad (4.89')$$

dacă $f \in C^0([a, b])$.

4.9.3. Funcții Green simetrice

Dacă se presupun condițiile la limită $\mathbf{U}(y) = 0$ astfel încît

$$(\mathrm{P}y, z)_0 = (y, \mathrm{P}z)_0 \qquad (4.90)$$

pentru orice $y, z \in C^2_*([a, b]) = \{f \mid f \in C^2([a, b]), \mathbf{U}(y) = 0\}$, atunci funcția Green va fi simetrică în variabilele x și ξ; într-adevăr, dacă

y și z sînt soluții din $C^2_*([a, b])$ ale ecuațiilor $-\mathrm{P}y = f$, $-\mathrm{P}z = g$, $f, g \in C^0([a, b])$, din (4.89') se deduce

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \quad z(x) = \int_a^b G(x, \xi) g(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

iar prin înlocuire în (4.90) se deduce egalitatea

$$\int_a^b \int_a^b [G(x, \xi) - G(\xi, x)] f(x) g(\xi)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\xi = 0,$$

care, deoarece f și g sînt funcții continue arbitrare, utilizînd lema fundamentală a calculului variațiilor, arată că $G(x, \xi) = G(\xi, x)$, $a \leqslant x, \xi \leqslant b$.

În baza acestor observații, scriind ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[p(x)y'] - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 \qquad (4.90')$$

sub forma $\mathrm{P}y = \lambda\rho y$, dacă $y \in C^2_*([a, b])$, y va verifica ecuația integrală

$$-\lambda \int_a^b G(x, \xi)\rho(\xi) y(\xi)\, \mathrm{d}\xi = y(x), \qquad (4.89'')$$

deci $-\lambda$ este o valoare caracteristică a operatorului integral $(\mathrm{T}y)(x) = \int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)y(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ (λ este o valoare caracteristică a unui operator dacă $1/\lambda$ este o valoare proprie a aceluiași operator); scriind ultima egalitate sub forma

$$\int_a^b k(x, \xi) z(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \mu z(x)$$

cu $k(x, \xi) = G(x, \xi)\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}$, $z(x) = \sqrt{\rho(x)}\, y(x)$, $\mu = -1/\lambda$, se obține z ca funcție proprie corespunzînd valorii proprii μ a operatorului integral $\int_a^b k(x, \xi) z(\xi)\, \mathrm{d}\xi$ cu nucleul k simetric. Teoria generală a acestor operatori arată că există o infinitate numărabilă de valori proprii $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots \to 0$ cărora le corespund funcții proprii $z_1, z_2, \ldots$ din $L_2([a, b])$; deci $\lambda_n = -\frac{1}{\mu_n}$ și $y_n = \frac{z_n}{\sqrt{\rho}}$ vor fi respectiv valorile și funcțiile proprii ale problemei Sturm-Liouville. Din egalitatea (4.89'') se deduce că deoarece $G \in C^0$, neapărat $y_n \in C^0([a, b])$, ceea ce antrenează faptul că y_n este o soluție ordinară a ecuației diferențiale (4.90'), deci y_n și py_n' sînt funcții de clasă C^1 pe $[a, b]$ iar cum $p \in C^1$, $p > 0$, se deduce $y' \in C^1$, adică $y \in C^2([a, b])$.

Din aceste fapte rezultă o legătură directă între metodele teoriei ecuațiilor integrale și metodele teoriei ecuațiilor cu derivate parțiale; diferența constă în aceea că metodele teoriei ecuațiilor integrale solicită cunoașterea unor soluții particulare ale ecuațiilor cu derivate parțiale (așa cum a fost cazul funcției Green considerat aici). Avantajul teoriei ecuațiilor integrale față de metoda directă aplicată în 4.8 constă în aceea că este aplicabilă și altor condiții la limită, nu neapărat unor condiții de forma $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ sau $y'(a) = 0$, $y'(b) = 0$; astfel, este suficient să verificăm egalitatea $(\mathrm{P}y, z)_0 = (y, \mathrm{P}z)_0$, $y, z \in C^2_*([a, b])$ pentru a putea afirma că rezultatele din 4.8 rămîn valabile. De exemplu, în cazul condițiilor la limită

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_3 y'(a) = 0, \quad \beta_2 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \quad \beta_4 \neq 0,$$

integrînd prin părți, se obține egalitatea

$$(\mathrm{P}y, z)_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} p(a)\, y(a) z(a) - \frac{\beta_2}{\beta_4} p(b)\, y(b)\, z(b) + \int_a^b (py'z' + qyz)\, \mathrm{d}x$$

iar membrul al doilea nu se va modifica prin înlocuirea lui y prin z și reciproc [deoarece $(y, \mathrm{P}z)_0 = (\mathrm{P}z, y_0)_0$; deci funcția Green corespunzătoare va fi simetrică în variabilele x și ξ, ceea ce antrenează existența unei infinități numărabile de funcții și valori proprii pentru această problemă la limită.

În cazul condițiilor la limită (4.82'), este ușor de verificat că notînd

$$m_{jk} = \det \begin{bmatrix} \alpha_j & \alpha_k \\ \beta_j & \beta_k \end{bmatrix}, \quad j \neq k,$$

vom avea verificată egalitatea de simetrie $(\mathrm{P}y, z)_0 = (y, \mathrm{P}z)_0$ dacă $p(a)\, m_{24} = p(b)\, m_{13}$, în ipoteza $m_{12} \neq 0$.

Exemplul 17. Dacă $-\mathrm{P}y = 4x^2y'' + y$ iar condițiile la limită sînt $y(a) = 0$, $y(a+1) = 0$, $a > 0$, deoarece este cazul unei ecuații de tip Euler, se găsește următoarea funcție Green:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \sqrt{x\xi} \ln \dfrac{x}{a} \dfrac{\ln \dfrac{\xi}{a+1}}{\ln \dfrac{a+1}{a}}, & \text{dacă } x < \xi, \\[2ex] \sqrt{x\xi} \ln \dfrac{\xi}{x} \dfrac{\ln \dfrac{x}{a+1}}{\ln \dfrac{a+1}{a}}, & \text{dacă } x \geqslant \xi. \end{cases}$$

(se observă că operatorul P nu este scris sub forma autoadjunctă și de aceea, scriind ecuația diferențială a funcțiilor proprii

$$4x^2y'' + y + \lambda y = 0,$$

vom avea $p(x) = 1$, $q(x) = \dfrac{1}{4x^2}$, $\rho(x) = \dfrac{1}{4x^2}$.

4.10. Probleme la limită pentru ecuații diferențiale liniare de ordin n

4.10.1. Definiții, generalități

Rezultatele anterioare se pot extinde la orice ecuație diferențială liniară de ordin $n > 2$; astfel, dacă P este operatorul diferențial

$$\mathrm{P}y = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\, y^{(j)},$$

condițiile la limită vor fi $\mathbf{U}(y) = [U_1(y), \ldots, U_m(y)]^t$, notînd

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_j^k\, y^{(k)}(a) + \beta_j^k\, y^{(k)}(b)], \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

unde m este rangul matricei $[\alpha_j^k, \beta_j^k]$, $\alpha_j^k, \beta_j^k \in \mathbb{R}$. Scriind $U_j(y) = \gamma_j$, $j = 1, 2, \ldots, \gamma_j \in \mathbb{R}$, se obțin condiții la limită *neomogene* iar dacă $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = 0$, aceste condiții la limită se numesc *omogene* iar o probemă la limită constă în determinarea soluțiilor ecuației $\mathrm{P}y = f$ care verifică condițiile $\mathbf{U}(y) = \boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \ldots, \gamma_m]^t$. Ca și pînă acum, prin funcții și valori proprii ale unei probleme la limită se înțeleg soluțiile (ordinare sau generalizate) nenule ale ecuației $\mathrm{P}y + \lambda y = 0$ (sau $\mathrm{P}y + \lambda \rho y = 0$) care verifică condițiile la limită omogene.

Există probleme la limită care pot să nu admită soluții; de exemplu, ecuația diferențială $y''' = 0$ nu admite soluții care să verifice condițiile $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(0) + y'(1) = 1$, deoarece scriind soluția generală a ecuației, adică $y(x) = Ax^2 + Bx + C$, se găsește $C = 0$ și sistemul incompatibil $A + B = 1$, $2A + 2B = 1$.

Se pot determina ușor condiții de compatibilitate a problemei la limită

$$\mathrm{P}y = f, \quad \mathbf{U}(y) = \boldsymbol{\gamma},$$

dacă se cunoaşte soluţia generală a ecuaţiei $\mathrm{P}y = f$; scriind

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + y_p,$$

vor trebui determinate constantele $c_1, \ldots, c_n$ pentru a se verifica condiţiile la limită $\mathbf{U}(y) = \gamma$, ceea ce este echivalent cu rezolvarea sistemului liniar

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{U}(y_j) + \mathbf{U}(y_p) = \gamma,$$

format din m ecuaţii cu n necunoscute. Acest sistem va fi compatibil dacă şi numai dacă matricele

$$\begin{bmatrix} U_1(y_1) & \ldots & U_1(y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ U_m(y_1) & \ldots & U_m(y_n) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U_1(y_1) & \ldots & U_1(y_n) & U_1(y_p) - \gamma_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_m(y_1) & \ldots & U_m(y_n) & U_m(y_p) - \gamma_m \end{bmatrix}$$

au acelaşi rang; dacă r este acest rang, atunci problema la limită omogenă

$$\mathrm{L}y = 0, \quad \mathbf{U}(y) = 0$$

admite exact $n - r$ soluţii liniar independente. Problema la limită omogenă va avea întotdeauna soluţii dacă $m < n$; dacă $m = n$, vor exista soluţii numai dacă matricea $[U_j(y_k)]$ este singulară iar dacă $m > n$, în general nu sînt soluţii. În particular, în cazul $n = m$ are loc următoarea alternativă: dacă problema la limită omogenă admite numai soluţia banală, atunci problema la limită neomogenă admite o singură soluţie.

4.10.2. Probleme la limită adjuncte

În ipoteza că $a_j \in C^j([a, b])$, se poate scrie operatorul formal adjunct

$$\mathrm{P}^+ z = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, [a_j(x) z]^{(j)}$$

al operatorului diferenţial P; un calcul simplu conduce la identitatea Lagrange

$$z\mathrm{P}y - y\mathrm{P}^+ z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{P}^*(y, z), \tag{4.91}$$

unde s-a notat

$$\mathrm{P}^*(y, z) = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j+k=l} (-1)^j y^{(k)} [a_{l+1}(x) z]^{(j)}. \tag{4.91'}$$

Din identitatea lui Lagrange, prin integrare, se ajunge la identitatea lui Green

$$\int_a^b (z\mathrm{P}y - y\mathrm{P}^+ z) \, \mathrm{d}x = \mathrm{P}^*(y, z) \Big|_a^b, \tag{4.92}$$

care, în notaţiile anterioare, se scrie

$$(z, \mathrm{P}y)_0 - y, \mathrm{P}^+ z)_0 = \mathrm{P}^*(y, z) \Big|_a^b, \tag{4.92'}$$

$\mathrm{P}^*(y, z)\big|_b^a$ fiind evident o formă biliniară în raport cu parametrii

$$y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a), \quad y(b), \quad y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b),$$

$$z(a), z'(a), \ldots, z^{(n-1)}(a), \quad z(b), \quad z'(b), \ldots, z^{(n-1)}(b),$$

ceea ce permite să transcriem membrul al doilea din (4.92) sub forma

$$\mathrm{P}^*(y, z) \Big|_a^b = U_1(y) \, U_{2n}(z) + U_2(y) V_{2n-1}(z) + \ldots$$

$$\ldots + U_{2n-1}(y) \, V_2(z) + U_{2n}(y) \, V_1(z),$$

unde $U_1, \ldots, U_{2n}$ sînt forme liniare în $y(a), \ldots, y^{(n-1)}(b)$ iar $V_1, \ldots, V_{2n}$ sînt tot forme liniare dar în $z(a), \ldots, z^{(n-1)}(b)$. În aceste condiţi, problema la limită

$$\mathrm{L}^+ z = 0, \; V_j(z) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 2n - m,$$

se numeşte *problema la limită adjunctă* (sau *conjugată*) relativă la problema la limită $\mathrm{L}y = f$, $U_j(y) = \gamma_j, j = 1, 2, \ldots, m$; se poate arăta că problema la limită $\mathrm{L}y = f$, $U_j(y) = \gamma_j, j = 1, 2, \ldots, m$, este compatibilă dacă şi numai dacă

$$(f, z)_0 = \gamma_1 V_{2n}(z) + \gamma_2 V_{2n-1}(z) + \ldots + \gamma_m V_{2n-m+1}(z),$$

unde z este soluţie a problemei la limită adjuncte iar dacă p şi q sînt numărul de soluţii liniar independente ale problemelor la limită

în cauză (q se referă la problema la limită adjunctă), atunci $q = p + m - n$ şi deci, în particular, dacă $m = n$, avem $q = p$ (cele două probleme la limită au întotdeauna acelaşi număr de soluţii liniar independente).

De exemplu, dacă $Py = y'' + y$, avem $P^+z = z'' + z$ iar $P^*(y, z) = y'z - yz'$; presupunînd $U_1(y) = y'(a)$, $U_2(y) = y(b)$, se poate scrie

$$P^*(y, z)\Big|_a^b = U_1(y)\,V_4(z) + U_2(y)V_3(z) + U_3(y)\,V_2(z) + U_4(y)\,V_1(z),$$

unde

$$V_4(z) = -z(a),\ \ V_3(z) = -z'(b),\ \ V_2(z) = z'(a),\ \ V_1(z) = z(b),\ \ V_3(y) = y(a),\ \ V_4(y) = y'(b).$$

În ipoteza $m = n$, problema la limită omogenă $\mathrm{P}y = 0$, $U(y) = 0$ se numeşte *autoadjunctă* dacă soluţia ei va coincide cu soluţia problemei adjuncte corespunzătoare $\mathrm{P}^+z = 0$, $V_j(z) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ în sensul că operatorul P este formal autoadjunct iar condiţiile la limită $U(y) = 0$ şi $V(y) = 0$ sînt echivalente; problemele la limită autoadjuncte au fost luate anterior în consideraţie în ipoteza $n = 2$ şi elesînt importante prin aceea că se întîlnesc frecvent în practică iar identitatea lui Green se scrie sub forma simetrică

$$(\mathrm{P}y, z)_0 = (y, \mathrm{P}z)_0 \tag{4.92''}$$

deoarece $\mathrm{P}^*(y, z)\Big|_a^b = 0.$

În particular, dacă operatorul diferenţial P are coeficienţi constanţi, avem $\mathrm{P} = \mathrm{P}^+$ dacă $n = 2n'$, $n' = 1, 2, \ldots$, şi dacă $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$, iar $\mathbf{U}(y)$ sînt condiţiile la limită periodice

$$y^{(j)}(a) = y^{(j)}(b), \quad j = 0, 1, \ldots, n',$$

se va obţine o problemă la limită autoadjunctă; dacă însă condiţiile la limită coincid cu condiţiile Cauchy $y(a)=0$, $y'(a)=0, \ldots, y^{(n-1)} = 0$, acestea nu conduc la o problemă autoadjunctă.

4.10.3. Soluţii fundamentale şi funcţii Green

Prin *soluţie fundamentală* a operatorului diferenţial liniar P, definit prin

$$\mathrm{P}y = \sum_{j=0}^{n} a_j(x)\,y^{(j)},\ a_j : [a,\ b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C}),\quad j = 0, 1, \ldots, n,\ a_n \neq 0,$$

se înţelege funcţia $g : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ cu proprietăţile :

a) dacă $g = g(x, \xi)$, atunci în fiecare din triunghiurile $a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b$ şi $a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b$ derivatele parţiale în raport cu x pînă la ordinul n inclusiv sînt funcţii continue în raport cu ambele variabile;

b) în fiecare din triunghiurile amintite, avem $\mathrm{P}G(x, \xi) = 0$ (ξ fiind considerat parametru);

c) în pătratul $[a, b] \times [a, b]$, G este funcţie de clasă C^{n-2}.

d) Dacă $a < \xi < b$, atunci

$$\frac{\partial^{n-1} g(\xi +, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial^{n-1} g(\xi -, \xi)}{\partial x} = \frac{1}{a_n(\xi)}.$$

Pentru orice operator diferenţial P se poate construi cel puţin o soluţie fundamentală; astfel; dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt soluţii particulare liniar independente ale ecuaţiei $\mathrm{P}y = 0$, se verifică ipotezele a) – d) pentru

$$k(x, \xi) = \frac{\mathrm{sgn}(x - \xi)}{2a_n(\xi)\,\omega(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(\xi) & \ldots & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & \ldots & y_n'(\xi) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ y^{(n-2)}(\xi) & \ldots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ y_1(x) & \ldots & y_n(x) \end{vmatrix},$$

unde $\mathrm{sgn}\,x = +1$ dacă $x > 0$, $\mathrm{sgn}\,x = -1$ dacă $x < 0$ iar ω este wronskianul soluţiilor $y_1, \ldots, y_n$. Această soluţie fundamentală verifică în plus

$$k(\xi, \xi) = 0,\ \frac{\partial k(\xi, \xi)}{\partial x} = 0, \ldots, \frac{\partial^{n-2} k(\xi, \xi)}{\partial x^{n-2}} = 0,$$

iar orice altă soluţie fundamentală se va scrie sub forma

$$g(x, \xi) = k(x, \xi) + c_1(\xi)\,y_1(x) + \ldots + c_n(\xi)\,y_n(x); \tag{4.93}$$

importanţa deosebită a soluţiei fundamentale constă în aceea că integrala cu parametru $\int_a^b g(x, \xi) f(\xi)\,d\xi$ va fi o soluţie ordinară a ecuaţiei neomogene $\mathrm{P}y = f$, dacă $f \in C^0([a, b])$, justificarea realizîndu-se exact ca în cazul $n = 2$. Cu alte cuvinte, are loc egalitatea

$$\mathrm{P}\left(\int_a^b g(x, \xi)\,f(\xi)\,d\xi\right) = f(x), \tag{4.93'}$$

care, cu ajutorul limbajului teoriei distribuţiilor, se transcrie

$$Pg(x, \xi) = \delta(x - \xi)$$

$\left[\text{deoarece } P\int_a^b g(x, \xi) f(\xi)\, d\xi = P(g(x, \xi), f(\xi)) = (Pg(x, \xi), f(\xi)) \text{ iar } f(x) = (f(\xi), \delta(x - \xi)) \text{ şi deci egalitatea } (4.93') \text{ înseamnă } (Pg, f) = (\delta(x - \xi), f)\right]$.

Dacă în egalitatea (4.93) se determină funcţiile $c_1, \ldots, c_n$ astfel încît să se verifice ca funcţie de x şi condiţiile la limită $U(g) = 0$, atunci această soluţie fundamentală se numeşte *funcţie Green* a problemei la limită $U(y) = 0$, ataşate operatorului P, şi se notează prin G; aşadar, dacă există funcţia Green G a unei probleme la limită, atunci soluţia problemei la limită $Ly = f$, $U(y) = 0$ se va scrie

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

dacă $f \in C^0([a, b])$ şi este evident că funcţia Green va exista, dacă problema la limită omogenă $Py = 0$, $U(y) = 0$ admite $y = 0$ ca singură soluţie.

Funcţia Green (4.93) este definită cu ajutorul soluţiei fundamentale k; se poate însă construi direct funcţia G dacă se cunoaşte sistemul fundamental de soluţii $y_1, \ldots, y_n$ al ecuaţiei $Py = 0$ în modul următor: se presupune $\xi \in [a, b]$ fixat şi se scrie

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c_1(\xi)\, y_1(x) + \ldots + c_n(\xi)\, y_n(x), & \text{dacă } a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b, \\ d_1(\xi)\, y_1(x) + \ldots + d_n(\xi)\, y_n(x), & \text{dacă } a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b, \end{cases}$$

parametrii $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n$ determinîndu-se din condiţiile verificate de funcţia Green; condiţiile de continuitate şi saltul derivatei de ordinul $n - 1$ conduc la sistemul

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} b_j(\xi)\, y_j^{(k)}(\xi) = 0, & k = 0, 1, \ldots, n-2, \\ \sum_{j=1}^{n} b_j(\xi)\, y_j^{(n-1)}(\xi) = \dfrac{1}{a_n(\xi)}, \end{cases}$$

unde $b_j = d_j - c_j$. În acest mod $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sînt unic determinaţi iar dacă se scriu condiţiile la limită $U(y)$ sub forma

$$U(y) = U^a(y) + U^b(y),$$

în U^a intrînd termenii calculaţi în $x = a$ iar în U^b termenii calculaţi în $x = b$, condiţiile la limită $U(G) = 0$ se vor scrie sub forma sistemului

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(\xi)\, U^a(y_j) + \sum_{j=1}^{n} d_j(\xi)\, U^b(y_j) = 0$$

din care se determină fie $c_1, \ldots, c_n$ fie $d_1, \ldots, d_n$; în primul caz, va rezulta $d_1, \ldots, d_n$ din $d_j = b_j + c_j$, $j = 1, \ldots, n$, iar în al doilea caz, se pot deduce $c_1, \ldots, c_n$ din $c_j = d_j - b_j$, $j = 1, \ldots, n$.

La fel ca şi în cazul $n = 2$, se arată că dacă problema la limită este autoadjunctă, atunci funcţia Green G este simetrică: $G(x, \xi) = G(\xi, x)$, ceea ce antrenează existenţa unei infinităţi numărabile de funcţii şi valori proprii pentru operatorul integral $\int_a^b G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi$, ceea ce conduce la existenţa unei infinităţi numărabile de funcţii şi valori proprii atît pentru operatorul P cît şi pentru operatorul $\frac{1}{\rho}P$, $\rho > 0$, $\rho \in C^0([a, b])$. Şirul funcţiilor proprii este complet în $L_2([a, b])$, ceea ce permite dezvoltarea in serie Fourier de funcţii proprii a elementelor din $L_2([a, b])$.

Existenţa unei infinităţi numărabile de valori proprii pentru problema la limită

$$Py - \lambda\rho y = 0, \quad U(y) = 0$$

se poate justifica în acelaşi mod ca şi în cazul $n = 2$, luînd în consideraţie funcţiile $\varphi_j = \varphi_j(x, \lambda)$, $j = 1, \ldots, n$, soluţii ale ecuaţiei diferenţiale $Py - \lambda\rho y = 0$ care verifică datele iniţiale:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(c, \lambda) = 1, \quad \varphi_1'(c, \lambda) = 0, \ldots, \varphi_1^{(n-1)}(c, \lambda) = 0 \\ \varphi_2(c, \lambda) = 0, \quad \varphi_2'(c, \lambda) = 1, \ldots, \varphi_2^{(n-1)}(c, \lambda) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(c, \lambda) = 0, \quad \varphi_n'(c, \lambda) = 0, \ldots, \varphi_n^{(n-1)}(c, \lambda) = 1 \end{array}\right\}$$

cu $c \in [a, b]$.

În cazul problemelor la limită pentru sisteme diferenţiale liniare, se pot utiliza noţiuni şi consideraţii analoage.

4.11. Funcții și valori proprii pentru operatorul lui Laplace

4.11.1. Generalități

Dacă

$$Pu = -\Delta_n u, \quad \Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \; n = 2\; 3, \ldots,$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D_n$, calculînd produsul scalar $(P\varphi, \psi)_0 = (\varphi, P\psi)_0$ (este ușor de verificat că în acest caz $P^+ = P$), prin utilizarea formulei Gauss-Ostrogradski se obține

$$A(\varphi, \psi) = -\int_{D_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}\psi\right)d\mathbf{x} = -\sum_{j=1}^{n}\int_{D_n}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)d\mathbf{x} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_{D_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}d\mathbf{x} = \int_{D_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)d\mathbf{x} - \int_{\partial D_n}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,d\sigma,$$

unde $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\nu_j$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ fiind versorul normalei exterioare la ∂D_n; în ipoteza că φ și ψ sînt funcții test, găsim

$$A(\varphi, \psi) = \int_{D_n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)d\mathbf{x}$$

și în conformitate cu teoria generală din 4.8 vom presupune A o funcțională biliniară definită pe $H_0^1(D_n)\times H_0^1(D_n)$. Problema funcțiilor și valorilor proprii din $H_0^1(D_n)$ ale operatorului Laplace, adică determinarea soluțiilor slabe ale problemei la limită

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \lambda u = 0, \quad u\Big|_{\partial D_n} = 0,$$

revine la verificarea ipotezelor din 4.8.2; de obicei, ecuația

$$\Delta_n u + \lambda u = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

se numește *ecuația lui Helmholtz* iar condiția la limită $u|_{\partial D_n} = 0$ poartă numele de *condiție Dirichlet.*

Deoarece

$$\|\varphi\|_0^2 = \int_{D_n}\varphi^2\,d\mathbf{x}, \quad \|\varphi\|_1^2 = \int_{D_n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2\right]d\mathbf{x},$$

se deduce $A(\varphi, \psi) = \|\varphi\|_1^2 - \|\varphi\|_0^2$, deci $k_1 = 1$, $k_0 = 1$, ceea ce implică, în baza teoremei 4.11, existența unei infinități numărabile de funcții și valori proprii pentru această problemă la limită; aceste funcții și valori proprii pot fi efectiv determinate pentru $n = 2$ sau 3, utilizînd teoria funcțiilor elementare și speciale (polinoame ortogonale, funcții Bessel) dacă domeniile sînt simple. Odată funcțiile proprii (slabe) determinate, este ușor de constatat că dacă $u \in H_0^1(D_n)$ este o astfel de funcție, atunci dacă $u \in C^0(D_n)$, neapărat, $u|_{\partial D_n} = 0$; deoarece $\int_{\partial D_n}\psi\varphi_k\,d\sigma = 0$ pentru orice funcție test în D, dacă $\varphi_k \to u$, convergența fiind în $H_0^1(D_n)$, se deduce $\int_{\partial D_n}\psi u\,d\sigma = 0$ ψ fiind o funcție continuă oarecare iar lema fundamentală a calculului variațiilor arată că neapărat $u|_{\partial D_n} = 0$.

4.11.2. Separarea variabilelor în ecuația Helmholtz din $\mathbb{R}^3$ în coordonate sferice

În coordonate sferice, ecuația Helmholtz din $\mathbb{R}^3$ se scrie

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \lambda v = 0$$

(vezi 4.6.2); deoarece $v = v(r, \theta, \varphi)$, scriind

$$v(r, \theta, \varphi) = h(r)\,Y(\theta, \varphi),$$

prin separare de variabile, se deduce că h și Y vor verifica ecuațiile

$$(r^2 h')' + (\lambda r^2 - \mu)h = 0,$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \mu Y = \Delta_3^* Y + \mu Y = 0,$$

μ fiind constanta de separare iar accentele se referă la operația de derivare în raport cu variabila r.

Ecuaţia diferenţială care defineşte funcţia h se poate reduce la o ecuaţie Bessel scriind $w = \sqrt{r}\,h$, obţinîndu-se ecuaţia

$$r^2 w'' + rw' + \left(\lambda r^2 - \mu - \frac{1}{4}\right) w = 0,$$

a cărei soluţie generală se scrie

$$w(r) = c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda} r) + c_2 N_\nu(\sqrt{\lambda}\, r)$$

cu $\nu^2 = \mu + \frac{1}{4}$, J_ν şi N_ν fiind funcţiile Bessel de speţa I, respectiv II şi deci

$$h(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} w(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} [c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda}\, r) + c_2 N_\nu(\sqrt{\lambda} r)],$$

c_1 şi c_2 fiind constante oarecare. Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ este astfel încît $\alpha(\alpha+1) = \mu$, se găseşte $\nu^2 = \mu + \frac{1}{4} = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4} = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2$ iar ecuaţia cu derivate parţiale pentru funcţia Y se va scrie $\Delta_3^* Y + \alpha(\alpha+1) Y = 0$ şi, comparînd cu 4.6.2 (diferenţa constă în aceea că acolo $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$), notînd cu P_α^n, Q_α^n soluţiile liniar independente ale ecuaţiei diferenţiale

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \left[\alpha(\alpha+1) - \frac{n^2}{1 - x^2}\right] y = 0,$$

în care P_α^n coincide cu funcţia Legendre asociată, dacă $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, avem

$$Y(\theta, \varphi) = [AP_\alpha^n(\cos\theta) + BQ_\alpha^n(\cos\theta)]\,[C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)].$$

Rezultă deci următoarele soluţii particulare (care depind de trei parametri λ, α şi n) ale ecuaţiei lui Helmholtz din $\mathbb{R}^3$ scris în coordonate sferice:

$$v_{\lambda,n,\alpha}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} [c_1 J_{\alpha+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} r) + c_2 N_{\alpha+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} r)][AP_\alpha^n(\cos\theta) + BQ_\alpha^n(\cos\theta)][C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)]$$

(în care n poate fi întreg sau nu).

În particular, dacă $D_3 \subset \mathbb{R}^3$ este interiorul sferei de rază R cu centrul în origine iar problema la limită este

$$\Delta_3 v + \lambda v = 0 \text{ în } D_3,\ v|_{\partial D_3} = 0,\ 0 < r < R,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < 2\pi,$$

soluţia trebuie să fie periodică în raport cu φ, deci $n = 0, 1, 2, \ldots$, iar α va lua de asemenea valorile $0, 1, 2, \ldots$; în plus $c_2 = 0$, deoarece funcţia Neumann N_ν este discontinuă în origine. Aşadar, pot fi luate în consideraţie doar funcţiile

$$v_{\lambda,n,\alpha}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{\alpha+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} r)\, P_\alpha^n(\cos\theta)[C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)]$$

cu $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\alpha$, care vor fi nule pentru $r = R$ dacă $J_{\alpha+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda} R) = 0$, deci dacă $\lambda = \lambda_k = \frac{1}{R^2} \mu_k^{\alpha+1/2}$, unde $\{\mu_k^{\alpha+\frac{1}{2}}\}$ sînt zerourile funcţiei Bessel $J_{\alpha+\frac{1}{2}}$. Aşadar, valorile proprii ale problemei la limită date vor fi $\lambda_k = \frac{1}{R^2} \mu_k^{\alpha+\frac{1}{2}}$, $k = 1, 2, \ldots$, iar funcţiile proprii sînt

$$v_{k,\alpha}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\mu_k^{\alpha+\frac{1}{2}} \frac{r}{R}\right) \sum_{n=-\alpha}^{+\alpha} P_\alpha^n(\cos\theta)\ [C_n \cos(n\varphi) + D_n \sin(n\varphi)]$$

(de remarcat că funcţiile Bessel în cauză sînt de indice semiîntreg, deci sînt combinaţii ale funcţiilor $\cos z$, $\sin z$, coeficienţii fiind polinoame în $1/\sqrt{z}$.

Se obişnuieşte să se utilizeze funcţiile Bessel sferice de prima speţă j_n, unde

$$j_n(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(r), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ceea ce face ca soluţiile continue şi periodice ale ecuaţiei lui Helmholtz în $\mathbb{R}_3$ în coordonate sferice, să se scrie sub forma

$$v_{\lambda,n,\alpha}(r, \theta, \varphi) = j_\alpha(\sqrt{\lambda}\, r)\, Y_{n,\alpha}(\theta, \varphi), \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n = 0, 1, \ldots$$

4.11.3. Separarea variabilelor în ecuația Helmholtz din $\mathbb{R}^3$ în coordonate cilindrice

Ecuația în cauză se va scrie

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\lambda v=0, \quad r \geqslant 0, \ \theta \in [0,2\pi[, \ z \in \mathbb{R},$$

și efectuînd calcule simple, se vor obține soluții de forma

$$v_{\alpha,\beta,\gamma}(r, \theta, z) = [AJ_\gamma(\beta r) + BN_\gamma(\beta r)]\,[C\cos(\gamma\theta) + D\sin(\gamma\theta)]\,[E\cos(\alpha z) + F\sin(\alpha z)],$$

unde $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda$ (dacă $\alpha = 0$, soluția care depinde de z va fi $E + Fz$) iar dacă $\gamma = 0$, soluția corespunzătoare va fi $C + D\theta$. Dacă $\beta = 0$, se găsesc soluțiile

$$v_{\alpha,\gamma}(r, \theta, z) = (Ar^\gamma + Br^{-\gamma})[C\cos(\gamma\theta) + D\sin(\gamma\theta)][E\cos(\alpha z) + F\sin(\alpha z)],$$

unde $\lambda = \alpha^2$, cu aceleași convenții pentru $\alpha = 0$ sau $\gamma = 0$).

În concordanță cu diversele posibilități de transcriere în coordonate cilindrice a unor domenii din $\mathbb{R}^3$, se pot deduce efectiv funcțiile și valorile proprii ale problemelor la limită pentru ecuația Helmholtz; de exemplu, dacă $\bar{D}_3$ este cilindrul $0 \leqslant z \leqslant h$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant R$ iar condiția la limită este $v|_{\partial D_3} = 0$, va trebui să avem $v(R, \theta, z) = 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant h$ și $v(r, \theta, 0) = 0$, $v(r, \theta, h) = 0$, $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, condiții care impuse lui $v_{\alpha,\beta,\gamma}$ conduc la determinarea parametrilor α, β și γ.

4.12. Problemele la limită și calculul variațiilor

În cazul problemei la limită Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \tag{4.94}$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad l > 0, \tag{4.95}$$

(cu ipotezele obișnuite: $p, p', q, \rho \in C^0([0, l])$, $p > 0$), problema determinării funcțiilor și valorilor proprii corespunzătoare se poate rezolva și cu ajutorul metodelor calculului variațiilor, deoarece în 4.8 s-a văzut că aceste funcții și valori proprii posedă anumite proprietăți de minim. Utilizînd notațiile

$$A(y, z) = \int_0^l [p(x)y'z' + q(x)yz]\,dx,$$

$$(y, z)_\rho = \int_0^l \rho(x)\,yz\,dx,$$

în ipoteza $y, z \in C^2_*$, $C^2_* = \{f \mid f \in C^2([0, l]), f(0) = 0, f(l) = 0\}$, avem

$$A(y, y) = \int_0^l [p(x)y'^2 + q(x)y^2]\,dx,$$

$$(y, y)_\rho = \int_0^l \rho(x)\,y^2(x)\,dx = \|y\|^2_\rho,$$

iar aceste funcționale vor juca un rol important în viitor.

Dacă $\rho = 1$, în 4.8 s-a obținut prima funcție proprie ca fiind elementul din $M_1 = H^1_0([0, l])$, $\|y\|_0 = 1$, care realizează minimul funcționalei $A(y, y)$; deoarece ipoteza $\rho \neq 1$ nu modifică în nici un fel raționamentele din 4.8, minimul funcționalei $A(y, y)$ în mulțimea C^2_*, cu ipoteza $\|y\|^2_\rho = 1$ este de fapt o problemă variațională de tip izoperimetric (vezi 3.8). Utilizînd teorema lui Euler (teorema 3.7) și notînd $-\lambda$ multiplicatorul în cauză, funcția $y \in C^2_*$ care realizează minimul căutat va verifica ecuația lui Euler corespunzătoare lagrangianului $\mathscr{L}_1 = p(x)y'^2 + q(x)y^2 - \lambda\rho(x)y^2$, care, după cum se verifică direct, nu este altceva decît ecuația diferențială (4.94) (dacă $y \in C^2_*$, condițiile la limită (4.95) se verifică automat); notînd cu y_1 această funcție, următoarea funcție proprie y_2 se va obține ca soluție a problemei izoperimetrice

$$A(y, y) \to \min, \quad \|y\|^2_\rho = 1, \quad (y, y_1)_\rho = 0, \quad y \in C^2_*,$$

ultima condiție fiind evident condiția de ortogonalitate pe care trebuie să o verifice funcțiile proprii. În baza teoremei lui Euler, prin considerarea lagrangianului

$$\mathscr{L}_2 = p(x)\,y'^2 + q(x)\,y^2 - \lambda\rho(x)y^2 + 2\mu y y_1,$$

în care multiplicatorii sînt $-\lambda$ și 2μ, se obține ecuația lui Euler

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,y'] - q(x)y + \lambda\rho(x)y = \mu\rho(x)\,y_1,$$

care va coincide cu ecuaţia (4.91) dacă $\mu = 0$; or, înmulţind ambii membri ai ultimei ecuaţii cu funcţia proprie y_1, prin integrare în intervalul $[0, l]$, după efectuarea unei integrări prin părţi se găseşte egalitatea

$$A(y_1, y_2) - \lambda (y_2, y_1)_\rho = \mu (y_1, y_1)_\rho$$

(s-a scris y_2 în loc de y, deoarece ultima ecuaţie diferenţială este, prin ipoteză, verificată de funcţia proprie y_2). Ţinînd seama de condiţiile impuse, avem $A(y_1, y_2) = 0$ (vezi 4.8.2), $(y_2, y_1)_\rho = 0$, $(y_1, y_1)_\rho = 1$, ceea ce arată că neapărat $\mu = 0$. În concluzie, această nouă problemă variaţională conduce la definirea celei de-a doua funcţii proprii y_2 iar a n-a funcţie proprie va fi soluţia problemei izoperimetrice

$$A(y, y) \to \min, \quad \|y\|_\rho^2 = 1, \quad (y, y)_\rho = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \quad y \in C_*^2,$$

unde $y_1, \ldots, y_{n-1}$ sînt primele $n-1$ funcţii proprii.

Evident, aceste consideraţii sînt formale, deoarece nu demonstrează existenţa funcţiilor proprii ci doar posibilitatea de a lega problemele de tip Sturm-Liouville de problemele variaţionale; combinînd însă aceste fapte cu teoria expusă la 4.8 şi 4.9, se deduce şi existenţa efectivă a acestor funcţii proprii ca elemente din C_*^2.

CAPITOLUL 5

Derivata areolară şi aplicaţii

5.1. Condiţiile Cauchy-Riemann

5.1.1. Diferenţiabilitatea în $\mathbb{C}$

Fie D o mulţime deschisă în $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathrm{i}\mathbb{R}$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ şi $z \in D$; conform cu noţiunile introduse în 3.1, o funcţie $f : D \to \mathbb{C}$ va fi diferenţiabilă (forte sau Fréchet) în punctul z, dacă pentru orice $h \in \mathbb{C}$, astfel încît $z + h \in D$, are loc descompunerea

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)\,h + \alpha(z, h) \tag{5.1}$$

în care numărul complex $f'(z)$ este unic determinat (independent de h) iar

$$\frac{\alpha(z, h)}{h} \to 0 \quad \text{cînd} \quad h \to 0. \tag{5.2}$$

Scriind $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, $u = \mathrm{Re}\, f$, $v = \mathrm{Im}\, f$, $h = h_1 + \mathrm{i}h_2$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, $f'(z) = L_1(x, y) + \mathrm{i}L_2(x, y)$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$; deoarece $z + h = (x + h_1) + \mathrm{i}(y + h_2)$, rezultă

$$f(z+h) = f[(x+h_1) + \mathrm{i}\,(y+h_2)] = u\,(x+h_1, y+h_2) + \mathrm{i}v(x+h_1, y+h_2)$$

iar descompunerea (5.1) se va scrie

$$[u(x+h_1, y+h_2) - u(x, y)] + \mathrm{i}[v(x+h_1, y+h_2) - v(x, y)] =$$
$$= (L_1 + \mathrm{i}L_2)\,(h_1 + \mathrm{i}h_2) + \alpha_1(x, y, h_1, h_2) + \mathrm{i}\alpha_2(x, y, h_1, h_2);$$

separînd părţile reale şi cele imaginare, se găseşte sistemul

$$u(x+h_1, y+h_2) - u(x, y) = L_1(x, y)\, h_1 - L_2(x, y)\, h_2 + \alpha_1(x, y, h_1, h_2),$$

$$v(x+h_1, y+h_2) - v(x, y) = L_2(x, y) h_1 + L_1(x, y) h_1 + \alpha_2(x, y, h_1, h_2), \quad (5.3)$$

în care

$$0 \leqslant \lim_{\|\mathbf{h}\|\to 0} \frac{|\alpha_1(x, y, h_1, h_2)|}{\|h\|} = \lim_{\|\mathbf{h}\|\to 0} \frac{|\alpha_1(x, y, h_1, h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leqslant \lim_{h\to 0} \frac{|\alpha(z, h)|}{|h|} = 0,$$

ultima egalitate fiind (5.2) (s-a considerat h ca element al lui $\mathbb{R}^2$ avînd componentele h_1, h_2); prin urmare, se deduce

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|\to 0} \frac{|\alpha_1(x, y, h_1, h_2)|}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{\|\mathbf{h}\|\to 0} \frac{|\alpha_2(x, y, h_1, h_2)|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Din aceste consideraţii rezultă diferenţiabilitatea funcţiilor u şi v (privite ca funcţii de variabilele reale x şi y) în punctul $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$; deoarece coeficienţii lui h_1, respectiv h_2 din (5.3) trebuie să fie egali cu derivatele parţiale ale funcţiilor din membrul întîi în raport cu x şi respectiv y, din prima egalitate se deduce

$$L_1(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad L_2(x, y) = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \quad (5.4)$$

iar din a doua egalitate a sistemului (5.3) rezultă

$$L_1(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad L_2(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \quad (5.4')$$

În concluzie, dacă f este diferenţiabilă în punctul $z = x + iy \in D$, atunci partea reală şi partea imaginară ale acestei funcţii sînt de asemenea diferenţiabile [în punctul (x, y)] şi au loc egalităţile

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (5.5)$$

[în punctul $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$] numite *condiţiile Cauchy-Riemann* (care pe scurt vor fi notate condiţiile C — R); deoarece

$f'(z) = L_1(x, y) + iL_2(x, y)$, în baza egalităţilor (5.4) şi (5.4′), derivata lui f poate fi exprimată cu ajutorul părţilor reale şi imaginare ale funcţiei în discuţie prin una din egalităţile

$$f'(z) = \begin{cases} \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} - i\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i\dfrac{\partial v(x, y)}{\partial x}, \\[2mm] \dfrac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial v(x, y)}{\partial y} + i\dfrac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \end{cases} \quad (5.6)$$

Exemple. 1. Dacă $f(z) = \bar{z}^2$, $\bar{z} = x - iy$, atunci, evident $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ iar $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = -2xy$; condiţiile C—R (5.5) se scriu $2x = -2x$, $-2y = 2y$ şi vor fi verificate numai dacă $x = 0$, $y = 0$, deci numai dacă $z = 0$. Deci funcţia considerată este diferenţiabilă numai în origine cînd $f'(0) = 0$ [deoarece $u_x(0, 0) = 0$, $u_y(0, 0) = 0$].

2. Fie $f(z) = z^{-1}$, $z \neq 0$; avem

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad x^2 + y^2 > 0$$

şi se verifică imediat condiţiile C—R în orice punct $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; deci această funcţie este diferenţiabilă în întreg domeniul ei de definiţie iar cu ajutorul primei relaţii (5.6) avem

$$f'(z) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - i\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(ix+y)^2}{(x+iy)^2(x-iy)^2} = -\frac{\bar{z}^2}{z^2\bar{z}^2} = -z^{-2}, \quad z \neq 0.$$

3. Dacă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(z)\ (= e^z)$, deoarece $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$, se deduce imediat

$$u(x, y) = \exp(x) \cos y, \ v(x, y) = \exp(x) \sin y$$

iar deoarece condiţiile C—R se verifică pentru orice x şi y reali, se obţine diferenţiabilitatea acestei funcţii pentru orice $z \in \mathbb{C}$; în plus,

$$f'(z) = \exp'(z) = u_x(x, y) - iu_y(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = \exp(z).$$

4. Pentru $f(z) = \ln z$, utilizînd coordonatele polare $z = re^{i\theta}$, se va obţine

$$f(z) = \ln r + i\theta = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + c\right)$$

(constanta $c \in \mathbb{R}$ fiind de forma $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), egalitate care arată că această funcție este definită pentru orice $z \neq 0$ iar

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2k\pi.$$

Se verifică ușor condițiile C—R care sînt valabile pentru orice $z \neq 0$, iar

$$f'(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = z^{-1}, \quad z \neq 0.$$

Egalitățile (5.5) reprezintă condiții necesare pentru ca funcția $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, $z = x + \mathrm{i}y$, să fie diferențiabilă; reciproc, dacă $u, v : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ sînt funcții diferențiabile în punctul $(x, y) \in D$ (mulțimea D este prin ipoteza deschisă) și verifică în acest punct condițiile C—R, atunci f este diferențiabilă în punctul $z = x + \mathrm{i}y$. Într-adevăr, utilizînd diferențiabilitatea lui u și v, se pot scrie egalitățile

$$u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) = u_x(x, y)\, h_1 + u_y(x, y)\, h_2 + \alpha_1,$$
$$v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y) = v_x(x, y)\, h_1 + v_y(x, y)\, h_2 + \alpha_2,$$

cu $\dfrac{|\alpha_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \to 0$, $\dfrac{|\alpha_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \to 0$ cînd h_1 și h_2 tind la zero [h_1, h_2 sînt numere reale arbitrare care verifică ipoteza $(x+h_1, y+h_2) \in D$]; înlocuind în a doua egalitate v_x și v_y prin $-u_y$, respectiv u_x, după înmulțire cu i și adunare cu prima egalitate se găsește

$$f(z + h) - f(z) = [u_x(x, y) - \mathrm{i}u_y(x, y)]\, h + \alpha,$$

dacă se notează $h = h_1 + \mathrm{i}h_2$, $\alpha = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2$. Deoarece

$$0 \leq \frac{|\alpha|}{|h|} = \frac{|\alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{|\alpha_1|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} + \frac{|\alpha_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}},$$

evident $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\alpha}{h} = 0$, ceea ce înseamnă că f este diferențiabilă în punctul $z = x + \mathrm{i}y \in D \subset \mathbb{C}$, derivata lui f în acest punct fiind egală cu $u_x - \mathrm{i}u_y$.

Dacă f este diferențiabilă în fiecare punct al unei submulțimi deschise $G \subset D$, se spune că f este diferențiabilă în G și atunci condițiile C—R sînt verificate în orice punct din G.

5.1.2. Funcții armonice conjugate

Dacă $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ sînt funcții de clasă C^2 într-un domeniu $G \subset D$, f fiind diferențiabilă în G (ipoteză care după cum vom vedea, nu este restrictivă), atunci derivînd prima ecuație a sistemului C—R (5.5) în raport cu x și a doua ecuație a aceluiași sistem în raport cu y, prin adunarea egalităților astfel obținute, se deduce că funcția $u(= \operatorname{Re} f)$ este armonică în G:

$$\Delta_2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0. \tag{5.7}$$

Eliminînd, prin același procedeu, în sistemul C—R funcția u, se ajunge la aceeași concluzie: $v = \operatorname{Im} f$ este o funcție armonică în G

$$\Delta_2 v(x, y) = 0. \tag{5.7'}$$

Prin urmare, pentru ca funcțiile u, $v \in C^2(G)$, $G \subset D$ (D fiind mulțimea de definiție a funcției f iar G o mulțime deschisă), să poată fi considerate ca parte reală sau parte imaginară ale unei funcții $f : D \to \mathbb{C}$, f fiind diferențiabilă în G, este necesar ca aceste funcții să fie armonice în G; un cuplu (u, v) de funcții armonice în G care verifică în plus și condițiile C—R (5.5) poartă numele de funcții armonic conjugate (în G). Din considerațiile anterioare, se deduce că nu orice două funcții armonice pot forma o pereche de funcții armonic conjugate iar un fapt important este acela că dacă se cunoaște u (sau v), atunci se poate determina v (respectiv u) astfel încît perechea u, v) să formeze un cuplu de funcții armonic conjugate (funcția armonică v, respectiv u, este unic determinată dacă se face abstracție de o constantă aditivă). Într-adevăr, dacă u este cunoscută, atunci utilizînd condițiile C—R putem scrie

$$\mathrm{d}v = v_x \mathrm{d}x + v_y \mathrm{d}y = -u_y \mathrm{d}x + u_x \mathrm{d}y,$$

iar forma diferențială $-u_y \mathrm{d}x + u_x \mathrm{d}y$ este o diferențială [deoarece $(-u_y)_y = (u_x)_x$ (în baza ecuației (5.7)] și deci

$$v(x, y) = -\int_{x_0}^{x} u_y(t, y)\, \mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} u_x(x_0, t)\, \mathrm{d}t + c, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{5.8}$$

punctul $(x_0, y_0) \in G$ fiind suficient de apropiat de punctul $(x, y) \in G$; dacă se cunoaşte v (o funcţie armonică în G), în acelaşi mod se va obţine funcţia armonică conjugată corespunzătoare

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} v_y(t, y)\,\mathrm{d}t - \int_{y_0}^{y} v_x(x_0, t)\,\mathrm{d}t + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple. 5. Dacă $u(x, y) = ax^2 + 2bxy + xcy^2$, pentru ca această funcţie (care este indefinit derivabilă în $\mathbb{R}^2$) să fie partea reală a unei funcţii $f(z)$ diferenţiabile în $\mathbb{C}$, trebuie ca numerele reale a, b şi c să verifice egalitatea $a + c = 0$ [pentru a se verifica (5.7)]; cu această ipoteză, presupunînd în (5.8) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, se obţine $v(x, y) = b(y^2 - x^2) + 2axy$ făcînd abstracţie de constanta de integrare. În acest caz se găseşte

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) = (a - \mathrm{i}b)\, z^2.$$

6. Dacă $v(x, y) = 2 \cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2$, atunci un calcul simplu va conduce la funcţia armonică conjugată corespunzătoare $u(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y - 2xy$ (constanta de integrare fiind considerată nulă) şi deci $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) = 2\,\mathrm{i} \cos z - \mathrm{i}z^2 + c$.

Constanta arbitrară care apare prin aceste calcule se poate determina dacă se cunoaşte valoarea lui f într-un punct $z_0 \in G$: $f(z_0) = f_0 \in \mathbb{C}$.

5.1.3. Formula lui Schwartz

În 4.5 s-a rezolvat problema Dirichlet pentru cerc, obţinîndu-se formula lui Poisson (4.64) care defineşte (formal) o funcţie armonică în interiorul cercului $x^2 + y^2 = R^2$, cunoscîndu-se valorile acestei funcţii pe frontiera acestui cerc, valori definite cu ajutorul funcţiei continue f; utilizînd rezultatele anterioare, se deduce posibilitatea definirii unei funcţii $F : D \to \mathbb{R}$, diferenţiabile în $D = \{z \mid |z| < R\}$, cunoscîndu-se valorile părţii ei reale pe ∂D. Într-adevăr, deoarece în formula lui Poisson

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(\varphi)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}\,\mathrm{d}\varphi,$$

avem

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)} = \operatorname{Re}\frac{R + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta - \varphi)}}{R - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}} = \operatorname{Re}\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}},$$

cu notaţiile $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\zeta = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ ($|z| = r < R$, $|\zeta| = R$), se obţine

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\varphi + c$$

dacă se notează prin $f(\zeta)$ valorile lui $\operatorname{Re} F$ pe cercul $|\zeta| = R$: dacă valorile pe cercul $x^2 + y^2 = R^2$ sînt $g(x, y)$, atunci

$$f(\zeta) = g\left[\frac{1}{2\zeta}(\zeta^2 + R^2), \frac{1}{2\mathrm{i}\zeta}(\zeta^2 - R^2)\right],$$

deoarece $x = R\cos\varphi = \dfrac{R}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}) = \dfrac{1}{2}\left(\zeta + \dfrac{R^2}{\zeta}\right)$, $y = R\sin\varphi = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\zeta - \dfrac{R^2}{\zeta}\right)$. Cum din $\zeta = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ se deduce $\mathrm{d}\varphi = \dfrac{1}{\mathrm{i}\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$ şi cum din faptul că dacă φ parcurge segmentul $[0, 2\pi[$, variabila ζ va descrie cercul $|\zeta| = R$, se ajunge la forma finală a formulei lui Schwartz :

$$F(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta| = R} \frac{\zeta + z}{\zeta(\zeta - z)} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + c,$$

constanta $c \in \mathbb{C}$ fiind neapărat de forma $\mathrm{i}a$, $a \in \mathbb{R}$ (deoarece se obţine din calculul părţii imaginare a funcţiei F), deci se va determina dacă se cunoaşte valoarea lui $\operatorname{Im} F$ într-un punct.

Formula lui Schwartz este comodă uneori pentru că permite calculul efectiv al funcţiei F cu ajutorul teoriei reziduurilor; de asemenea, utilizînd teoria transformărilor conforme, se poate găsi soluţia efectivă pentru rezolvarea problemelor Dirichlet pentru orice domeniu plan (cu frontieră suficient de regulată),

5.2. Operatorii diferenţiali ∂_z şi $\bar{\partial}$. Derivata areolară

5.2.1. Definiţii şi proprietăţi

În baza consideraţiilor din 5.1, dacă $u = u(x, y)$ şi $v = v(x, y)$ sînt funcţii diferenţiabile într-un domeniu din $\mathbb{R}^2$, atunci combinaţia $u + \mathrm{i}v$ nu defineşte întotdeauna o funcţie diferenţiabilă în $\mathbb{C}$ (deci o funcţie diferenţiabilă de variabila complexă $z = x + \mathrm{i}y$). În unele aplicaţii practice este comodă utilizarea variabilelor complexe z şi $\bar{z}$

$$z = x + \mathrm{i}y, \qquad \bar{z} = x - \mathrm{i}y \tag{5.9}$$

în locul variabilelor reale x şi y, care pot fi înlocuite prin

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z}) = \frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{z} - z), \tag{5.9'}$$

şi vom conveni să notăm prin $f(z, \bar{z})$ funcţia

$$f(z, \bar{z}) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) =$$

$$= u\left[\frac{1}{2}(z + \bar{z}), \frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{z} - z)\right] + \mathrm{i}v\left[\frac{1}{2}(z + \bar{z}), \frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{z} - z)\right]. \tag{5.10}$$

Trebuie remarcat că spre deosebire de variabilele x şi y, variabilele z şi $\bar{z}$ nu sînt independente, dar utilizarea acestora poate fi justificată prin aceea că transformarea $(x, y) \to (z, \bar{z})$, avînd jacobianul $\frac{\partial(z, \bar{z})}{\partial(x, y)}$ egal cu $-2\mathrm{i}$ (deci nenul), este aşadar bijectivă.

Dacă u şi v sînt funcţii continue în $D \subset \mathbb{R}^2$, atunci $f(z, \bar{z}) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ va fi o funcţie continuă de variabila z în $D \subset \mathbb{C}$ iar dacă u şi v sînt integrabile în D, aceeaşi proprietate o va avea şi f; dacă însă u şi v sînt funcţii diferenţiabile în D, fără a fi armonic conjugate, nu are sens f', dar pot fi definite două operaţii ∂_z şi $\bar{\partial}$ cu ajutorul egalităţilor

$$\partial_z f = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right], \tag{5.11}$$

$$\partial_{\bar{z}} f = \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]. \tag{5.11'}$$

Exemple. 7. Dacă $u(x, y) = x + y$, $v(x, y) = x - y$, atunci

$$f(z, \bar{z}) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) = (1 + \mathrm{i})x + (1 - \mathrm{i})y$$

iar calcule simple arată că $\partial_z f = 0$, $\bar{\partial} f = 1 + \mathrm{i}$. Utilizînd (5.9'), se poate scrie $f(z, \bar{z}) = (1 + \mathrm{i})\bar{z}$ şi se observă imediat că ∂f şi $\bar{\partial} f$ pot fi obţinute direct prin derivare formală în raport cu z, respectiv $\bar{z}$.

8. Dacă $u(x, y) = y$, $v(x, y) = e^x$, avem

$$f(z, \bar{z}) = \frac{\mathrm{i}}{2}(\bar{z} - z) + \mathrm{i}\exp\left[\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right] = y + \mathrm{i}\exp(x)$$

şi, prin urmare,

$$\partial_z f = -\frac{\mathrm{i}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\exp(x) = -\frac{\mathrm{i}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\exp\left[\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right],$$

$$\bar{\partial} f = \frac{\mathrm{i}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\exp(x) = \frac{\mathrm{i}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\exp\left[\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right].$$

Dacă f este diferenţiabilă (într-un punct sau într-un domeniu), atunci cu ajutorul condiţiilor Cauchy-Riemann (5.5) se obţin egalităţile (valabile în punctul sau domeniul considerat)

$$\partial_z f = f', \qquad \bar{\partial} f = 0; \tag{5.12}$$

în acest mod se poate obţine un criteriu practic de verificare a diferenţiabilităţii în $\mathbb{C}$ a combinaţiei $u + v\mathrm{i}$ (de funcţii diferenţiabile): se utilizează (5.9') şi dacă rezultatul final nu conţine pe $\bar{z}$, atunci $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ va fi o funcţie diferenţiabilă (în $\mathbb{C}$).

Proprietăţile operatorilor diferenţiali ∂_z şi $\bar{\partial}$ se pot deduce direct din definiţii; astfel, vor fi valabile următoarele reguli de calcul:

$$\begin{array}{lll}
\text{I} & \partial_z(f + g) = \partial_z f + \partial_z g, & \bar{\partial}(f + g) = \bar{\partial} f + \bar{\partial} g, \\
\text{II} & \partial_z(af) = a\partial_z f, & \bar{\partial}(af) = a\bar{\partial} f, \quad a \in \mathbb{C}, \\
\text{III} & \partial_z(fg) = f\partial_z g + g\partial_z f, & \bar{\partial}(fg) = f\bar{\partial} g + g\bar{\partial} f, \\
\text{IV} & \partial_z\left(\dfrac{f}{g}\right) = g^{-2}(g\partial_z f - f\partial_z g), & \bar{\partial}\left(\dfrac{f}{g}\right) = g^{-2}(g\bar{\partial} f - f\bar{\partial} g), \quad g \neq 0.
\end{array} \tag{5.13}$$

O proprietate importantă a operatorului diferenţial $\bar{\partial}$ este exprimată prin egalitatea

$$\bar{\partial}[a(z)f(z, \bar{z})] = a(z)\bar{\partial} f(z, \bar{z}), \tag{5.14}$$

a fiind o funcţie diferenţiabilă (acolo unde u şi v sînt diferenţiabile); într-adevăr, din a treia proprietate (5.13) pentru $\bar{\partial}$, în baza lui (5.12) se găseşte (5.14). Cu alte cuvinte, în cazul în care a este o funcţie diferenţiabilă în $\mathbb{C}$, atunci faţă de operatorul $\bar{\partial}$, a se comportă ca o constantă.

O altă proprietate importantă a operatorilor diferențiali ∂_z și $\bar{\partial}$ este aceea că permite factorizarea operatorului lui Laplace Δ_2, acesta putîndu-se scrie

$$\Delta_2 u = \partial_z \bar{\partial} u = (\bar{\partial}\, \partial_z u) \text{ sau } \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \Delta_2 u,$$

după cum se poate verifica prin calcul. Derivarea în raport cu $\bar{\partial}$ se mai numește și *derivata areolară*.

5.2.2. Formula lui Pompeiu

Una din proprietățile remarcabile ale operatorului diferențial $\bar{\partial}$, descoperită de matematicianul român Dimitrie Pompeiu în 1912, constă în posibilitatea obținerii unei identități prin care valorile unei funcții $f(z, \bar{z}) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, u și v fiind diferențiabile într-un domeniu plan D, pot fi obținute cu ajutorul unei integrale curbilinii și a unei integrale duble în care apare operatorul $\bar{\partial}$. Această formulă se scrie, cu $z \in G$:

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\bar{\partial} f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}\eta, \quad \zeta = \xi + \mathrm{i}\eta \qquad (5.15)$$

Demonstrația formulei lui Pompeiu se obține cu ajutorul identității integrale

$$\int_{\partial G} f(z, \bar{z})\, \mathrm{d}z = 2\mathrm{i} \iint_G \bar{\partial} f(z, \bar{z})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y, \quad z = x + \mathrm{i}y, \qquad (5.16)$$

care este o consecință imediată a formulei lui Green din teoria integralelor curbilinii; într-adevăr, deoarece $f(z, \bar{z})\, \mathrm{d}z = (u\, \mathrm{d}x - v\, \mathrm{d}y) + \mathrm{i}(v\, \mathrm{d}x - u\, \mathrm{d}y)$ iar $\int_{\partial G} P\, \mathrm{d}x + Q\, \mathrm{d}y = \iint_G (Q_x - P_y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, dacă P și Q sînt de clasă C^1 în D iar $G \subset D$ este un domeniu cu frontieră netedă pe porțiuni, calculele imediate conduc la relația (5.16). Punînd în această formulă $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$ în loc de $z = x + \mathrm{i}y$ și considerînd în locul funcției $f = f(\zeta, \bar{\zeta})$ funcția $\dfrac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}$, cu $z \in G$ fixat iar în locul domeniului de

integrare, domeniul $G_\varepsilon = G \setminus \{\zeta \mid |\zeta - z| < \varepsilon\}$ [deoarece funcția $\dfrac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}$ nu este de clasă C^1 în G, avînd o singularitate de tip pol în punctul $\zeta = z$], se obține identitatea

$$\int_{\partial G_\varepsilon} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = 2\mathrm{i} \iint_{G_\varepsilon} \frac{\bar{\partial} f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta\, \mathrm{d}\eta,$$

dacă se ține seama atît de faptul că funcția $a(\zeta) = (\zeta - z)^{-1}$ este diferențiabilă în G (vezi exemplul 2) cît și de formula (5.14). Cum $\partial G_\varepsilon = \partial G \cup \gamma_\varepsilon$, unde γ_ε este frontiera cercului $|\zeta - z| = \varepsilon$ (ε este suficient de mic pentru ca $\gamma_\varepsilon \subset G$), vom avea

$$\int_{\partial G_\varepsilon} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = \int_{\partial G} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta,$$

semnul — din fața ultimei integrale fiind o consecință a faptului că frontiera γ_ε este parcursă în sens invers (adică în sensul de mers al acelor unui ceasornic, vezi fig. 5.1); prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$

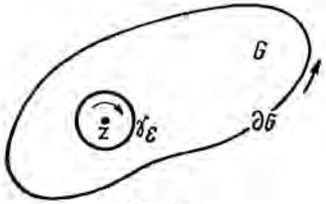

Fig. 5.1.

suficient de mic are loc egalitatea

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = \int_{\partial G} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta - 2\mathrm{i} \iint_{G_\varepsilon} \frac{\bar{\partial} f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta. \qquad (5.15')$$

Deoarece pe γ_ε avem $\zeta = z + \varepsilon e^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, se obține

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{\mathrm{i}\theta}, \bar{z} + \varepsilon e^{-\mathrm{i}\theta})\, \mathrm{d}\theta.$$

Înlocuind această integrală în (5.15′) prin trecere la limită, pentru $\varepsilon \downarrow 0$, după împărțire cu $2\pi i$ $\left[\text{deoarece } \int_0^{2\pi} f(z,\bar z)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi f(z,\bar z),\right.$ trecerea la limită sub semnul integralei fiind permisă în baza continuității lui $\left. f\right]$ se obține exact formula (5.15). Se poate scrie

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\iint_{G_\varepsilon} \frac{f(\zeta,\bar\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \iint_G \frac{f(\zeta,\bar\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\eta,$$

deoarece în egalitatea (5.15′) integralele curbilinii au limită, ceea ce antrenează existența limitei anterioare; această integrală dublă este o integrală improprie convergentă.

O consecință importantă a formulei (5.15) este egalitatea

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta, \tag{5.17}$$

valabilă pentru orice funcție diferențiabilă în domeniul simplu conex D, $G \subset D$ fiind un domeniu cu frontiera suficient de regulată; întradevăr, această formulă, numită *formula integrală a lui Cauchy*, se obține din formula lui Pompeiu deoarece în ipotezele făcute avem $\bar\partial f = 0$. Deoarece $z \notin \partial G$, integrandul din (5.17) este o funcție indefinit derivabilă în raport cu z și deci, în baza teoriei integralelor cu parametri, funcția f va fi de asemenea indefinit derivabilă în fiecare punct în care este diferențiabilă; se poate arăta cu ușurință că dacă este valabilă identitatea (5.17) pentru orice $z \in D$, atunci funcția f nu numai că este indefinit derivabilă, dar este și dezvoltabilă în serie Taylor (deci analitică) în domeniul ei de diferențiabilitate. Pentru aceasta, se observă că din formula integrală Cauchy (5.17) se obține

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

posibilitatea derivării sub semnul integralei decurgînd din teoremele cunoscute referitoare la această operație; presupunînd $z = z_0 \in D$ și $\zeta \in \gamma_R$, unde γ_R este frontiera cercului de rază R cu centrul în z_0,

$R > 0$ fiind arbitrar, dar astfel încît $\gamma_R \subset D$, vom avea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{z - z_0}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n\right]\mathrm{d}\zeta;$$

inversarea celor două operații (de însumare și de integrare) fiind posibilă dacă se alege $z \in D$ astfel încît $|z - z_0| < |\zeta - z_0| = R$ (vezi fig. 5.2), situație în care seria din ultima integrală este uniform convergentă, fiind vorba de o serie geometrică $\left(\text{a cărei sumă este } \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z}\right)$. Prin urmare, seria Taylor $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ este uniform convergentă pentru orice z care verifică inegalitatea $|z - z_0| < R$, iar în baza calculelor anterioare, suma acestei serii va fi egală cu $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$, adică, în baza lui (5.17), va fi egală chiar cu $f(z)$. Cu aceasta s-a justificat afirmația făcută anterior prin care funcțiile diferențiabile în $\mathbb{C}$ au fost presupuse de clasă C^2 (vezi 5.1.2); acestea se mai numesc și *funcții olomorfe*.

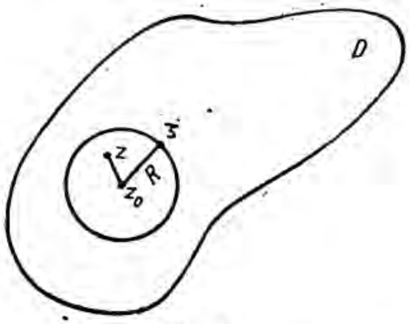

Fig. 5.2.

Toate considerațiile anterioare au fost făcute în ipoteza că funcțiile u și v care conduc la funcția $f = u + iv$ sînt diferențiabile și astfel încît în orice domeniu simplu conex din mulțimea în care u și v sînt diferențiable este aplicabilă formula lui Green; utilizînd însă teoria soluțiilor slabe (generalizate), expusă în 4.1, aceste considerații se pot extinde într-un cadru mai general care va fi prezentat ulterior.

5.3. Operatorul $\bar{\partial}$ și integrarea unor sisteme de ecuații

5.3.1. Sisteme Cauchy-Riemann

Ipoteza de diferențiabilitate a unei funcții de variabila complexă $z=x+iy$ conduce la sistemul

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{5.18}$$

dacă funcția se scrie $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$; sistemul (5.18) poate fi considerat ca un caz particular al sistemelor mai generale avînd forma

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}(u_x-v_y)+a(x,y)u-b(x,y)v=f(x,y)\\ \frac{1}{2}(v_x+u_y)+b(x,y)u+a(x,y)v=g(x,y)\end{aligned}\right\}, \tag{5.19}$$

pe care vom conveni să le numim *sisteme Cauchy-Riemann*: funcțiile a, b, f și g se presupun cunoscute într-un domeniu $G\subset\mathbb{R}^2$. Înmulțind a doua ecuație a sistemului (5.19) cu i și adunînd-o la prima ecuație, cu notațiile $w=u+iv$, $A=a+ib$, $F=f+ig$ [evident, $w=w(z,\bar{z})$, $A=A(z,\bar{z})$, $F=F(z,\bar{z})$], se găsește ecuația,

$$\bar{\partial}w+A(z,\bar{z})w=F(z,\bar{z}), \tag{5.20}$$

care este echivalentă sistemului (5.19). Dacă $A=0$, adică în cazul sistemului C–R neomogen, se găsește ecuația

$$\bar{\partial}w=F(z,\bar{z}), \tag{5.20'}$$

ale cărei soluții pot fi analizate cu ajutorul formulei lui Pompeiu; într-adevăr, ținînd seama de (5.15) și (5.20'), soluția sistemului (5.20') se poate scrie sub forma

$$w(z,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{w(\zeta,\bar{\zeta})}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{F(\zeta,\bar{\zeta})}{\zeta-z}d\zeta\, d\eta,\quad \zeta=\xi+i\eta. \tag{5.21}$$

Introducînd notațiile

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{w(\zeta,\bar{\zeta})}{\zeta-z}d\zeta,\quad (TF)(z,\bar{z})=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{F(\zeta,\bar{\zeta})}{\zeta-z}d\xi\, d\eta,$$

soluția se transcrie

$$w(z,\bar{z})=\Phi(z)+(TF)(z,\bar{z}) \tag{5.21'}$$

și deci se compune din suprapunerea a doi termeni Φ și TF; funcția Φ reprezintă evident o funcție diferențiabilă de variabila complexă z în $\mathbb{C}\setminus\partial G$ și va reprezenta soluția sistemului omogen corespunzător [care evident este sistemul (5.10)] deoarece pentru $F=0$ din (5.21') se obține $w=0$, $T0=0$ iar TF va fi o soluție a sistemului neomogen (5.19). De aici rezultă că pentru orice $z\in G$ va trebui ca $\bar{\partial}(TF)=F$, adică

$$\bar{\partial}\left[-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{F(\zeta,\bar{\zeta})}{\zeta-z}d\xi\, d\eta\right]=F(z,\bar{z}). \tag{5.22}$$

5.3.2. Soluții slabe pentru ecuația $\bar{\partial}w=F$

În baza teoriei din 4.1, funcția $w=w(z,\bar{z})$ va fi o soluție slabă în G a ecuației (5.20') dacă pentru orice funcție-test în G, fie ea φ, se verifică egalitatea

$$(w,\bar{\partial}^+\varphi)_0=(F,\varphi)_0 \tag{5.23}$$

în care $\bar{\partial}^+$ este operatorul diferențial formal adjunct al operatorului $\bar{\partial}$ iar

$$(\varphi,\psi)_0=\iint_G\varphi(z,\bar{z})\,\psi(z,\bar{z})\,dx\,dy.$$

Or, deoarece $\bar{\partial}$ este un operator diferențial liniar de ordinul întîi cu coeficienți constanți, vom avea $\bar{\partial}^+=-\bar{\partial}$, așa că egalitatea de definiție (5.23) în acest caz se transcrie sub forma

$$(w,\bar{\partial}\varphi)_0+(F,\varphi)_0=0.$$

Vom arăta că egalitatea (5.22) este justificată, adică (5.23) se verifică dacă $w=TF$, F fiind integrabilă (în sens Lebesgue) în G; dar,

dacă φ este o funcție-test, cum $\varphi = 0$ pe ∂G, din formula lui Pompeiu va rezulta $\varphi = \mathrm{T}(\bar{\partial}\varphi)$ și deci

$$(w, \bar{\partial}\varphi)_0 = \iint_G w(z, \bar{z})\, \bar{\partial}\varphi(z, \bar{z})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= \iint_G \left[-\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{F(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta\, \mathrm{d}\eta \right] \partial\varphi(z, \bar{z})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= \iint_G F(\zeta, \bar{\zeta}) \left[\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\bar{\partial}\varphi(z, \bar{z})}{z - \zeta} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta = (F, -\mathrm{T}(\bar{\partial}\varphi))_0 =$$

$$= (F, -\varphi)_0 = -(F, \varphi)_0$$

(s-a utilizat teorema lui Fubini privind posibilitatea inversării ordinii de integrare).

5.3.3. Integrarea unor sisteme de ecuații

Rezultatele din 5.3.1. și 5.3.2 pot fi utilizate pentru integrarea unor sisteme de ecuații cu derivate parțiale, dar pentru concretizarea rezultatelor vom considera doar sistemele de forma (5.19); ideea care stă la baza procedeului de integrare prezentat se bazează pe analogia care există între soluția ecuației $y' = f$ și soluția ecuației $\bar{\partial}w = F$. Astfel, dacă soluția primei ecuații se scrie $y = c + g$, unde c este o constantă oarecare iar g este o primitivă pentru f, soluția celei de-a doua ecuații se scrie $w = \Phi + \mathrm{T}F$, unde Φ este o funcție diferențiabilă (deci analitică) în variabila complexă z iar T este operatorul definit în 5.3.1.

În acest mod, notind $\bar{\partial}^0 = 1$, $\bar{\partial}^1 = \bar{\partial}$, $\bar{\partial}^j = \bar{\partial}(\bar{\partial}^{j-1})$, $j = 2, 3, \ldots$, se pot lua în considerație ecuații de forma

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(z, \bar{z})\, \bar{\partial}^j w = F(z, \bar{z}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

al căror algoritm de integrare va fi analog celui utilizat la integrarea ecuațiilor diferențiale $\sum_{j=0}^{n} a_j(x)\, y^{(j)} = f(x)$; în particular, în cazul cel mai simplu al ecuației $\bar{\partial}w + A(z, \bar{z})w = 0$, soluția se va scrie $w(z, \bar{z}) = \Phi(z) \exp\, (\mathrm{T}A)$, formulă denumită în literatura de specialitate *formula lui N. Teodorescu* după numele celui care a dedus-o prima oară.

Exemple. 9. Pentru ecuația $\bar{\partial}w - zw = 0$, adică pentru sistemul

$$\frac{1}{2}(u_x - v_y) - xu + yv = 0, \quad \frac{1}{2}(v_x + u_y) - yu - xv = 0,$$

soluția generală va fi

$$w(z, \bar{z}) = \Phi(z) e^{z\bar{z}};$$

sau, pe componente,

$$u(x, y) = a(x, y)\, e^{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = b(x, y)\, e^{x^2 + y^2},$$

a și b fiind funcții armonic conjugate (într-un domeniu dat) arbitrare.

10. Pentru ecuația $\bar{\partial}w - (2 - \mathrm{i})w = \bar{z}$, adică pentru sistemul

$$\frac{1}{2}(u_x - v_y) - 2u - v = x, \quad \frac{1}{2}(v_x + u_y) + u - 2v = -y,$$

soluția sub formă complexă va fi

$$w(z, \bar{z}) = \Phi(z)\, e^{(2+\mathrm{i})\bar{z}} - \frac{2 + \mathrm{i}}{5} \bar{z} - \frac{3 + 4\mathrm{i}}{25},$$

ceea ce, pe componente, înseamnă

$$u(x, y) = a(x, y)\, e^{2x+y} \cos(x - 2y) - b(x, y)\, e^{2x+y} \sin(x - 2y) - \frac{2x + y}{5} - \frac{3}{25},$$

$$v(x, y) = a(x, y)\, e^{2x+y} \sin(x - 2y) + b(x, y)\, e^{2x+y} \cos(x - 2y) - \frac{x - 2y}{5} - \frac{4}{25},$$

a și b fiind iarăși funcții armonic conjugate.

5.4. Derivata areolară

5.4.1. Monogenitate și olomorfie (α). Primitive areolare

Scopul urmărit de D. Pompeiu, prin considerarea funcțiilor $f: D \to \mathbb{C}$ nemonogene sau nediferențiabile în sensul formulei (5.1), sau, în alți termeni în sensul teoriei clasice a funcțiilor analitice

de o variabilă complexă, a fost de a studia proprietățile funcțiilor f pentru care integrala lui Cauchy este nenulă :

$$\int_\gamma f(z, \bar{z})\, dz \neq 0.$$

El s-a mărginit la funcțiile de clasă $C^1(D)$ pentru care, prin stabilirea relației (5.16), deci a formulei lui Green, se putea ajunge la o caracterizare a acestor funcții prin sistemul Cauchy-Riemann neomogen (5.20'). Considerînd integrala

$$F(\delta) = \frac{1}{2i}\int_\gamma f(z, \bar{z})\, dz,$$

unde δ este un domeniu cu frontiera γ netedă (cel puțin pe porțiuni), ca o funcție de domeniu și notînd măs $\delta = |\delta|$, formula (5.16), extinsă în cuplul (f, φ) de funcții cel puțin integrabile în sensul lui Lebesgue, conduce la considerarea derivatei în sensul lui Lebesgue

$$\frac{Df}{D\omega} = \lim_{\gamma \to z_0} \frac{F(\delta)}{|\delta|} = \lim_{\gamma \to z_0} \frac{\frac{1}{2i}\int_\gamma f(z, \bar{z})\, dz}{|\delta|} = \varphi(z_0) \qquad (5.24)$$

a funcției de domeniu $F(\delta)$, pe orice familie (γ, δ) regulată în z_0. Aceasta înseamnă că $\varepsilon > 0$ fiind dat, se poate determina un numă $r > 0$, astfel încît

$$\left| \frac{1}{2i|\delta|} \left| \int_\gamma f(z, \bar{z})\, dz - \varphi(z_0) \right| \right| < \varepsilon$$

pentru orice cuplu (γ, δ), $\delta \subset \{z \mid |z - z_0| < r\}$. În aceste condiții numărul $\varphi(z_0)$ va fi numit *derivata areolară* a funcției $f(z, \bar{z})$ în punctul $z_0 \in D$ iar funcția $f(z, \bar{z})$ va fi numită *monogenă* (α) sau *areolar monogenă* în z_0.

Semnificația extinderii noțiunii de monogenitate apare din următoarea teoremă care permite punerea în evidență a unei ecuații funcționale fundamentale în teoria derivatei areolare și a funcțiilor monogene (α).

Teorema 5.1. *Condiția necesară și suficientă, pentru ca o funcție $f \in C^0(D)$ să fie aproape peste tot monogenă (α) în D și cu derivată areolară sumabilă în D, este ca să existe o funcție $\psi \in L(D)$ și o funcție de domeniu $\psi(\delta)$ cu derivată Lebesgue aproape peste tot nulă în D, astfe încît relația*

$$\frac{1}{2i}\int_\gamma f(z, \bar{z})\, dz - \iint_\delta \varphi(v, \bar{v})\, d\omega = \psi(\delta) \qquad (5.25)$$

să aibă loc pentru orice cuplu $(\gamma, \delta) \subset D$. În acest caz,

$$\frac{Df}{D\omega} = \varphi \qquad (5.25')$$

aproape peste tot în D, deci φ va fi derivata areolară a lui f aproape peste tot în D.

Demonstrația acestei teoreme ca și considerațiile precedente asupra derivatei areolare se găsesc în lucrarea lui D. P o m p e i u , *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe* (Rendicenti Palermo t. 33, 1912 et t. 35, 1913).

Ecuația (5.25) este o extindere a ecuației (5.16) verificate de orice $f \in C^1(D)$ și de derivata sa areolară în sens restrîns $\bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.
Presupunînd $\psi(\delta) = 0$ în (5.26), funcțiile $f \in C^0(D)$, satisfăcînd ecuația (5.25), au fost *numite primitive areolare*, derivatele lor areolare, $\varphi \in L(D)$ fiind în general sumabile.

Primitivele areolare cu derivate areolare continue vor fi numite *funcții olomorfe* (α).

Dacă $\varphi \in L^\infty(D)$, ecuația (5.18) cu $\psi(\delta) = 0$ admite soluții $f \in C^0(D)$ pe care le vom numi *primitive areolare mărginite*, avînd în vedere că orice $\varphi \in L^\infty(D)$ este echivalentă cu o funcție mărginită și integrabilă Lebesgue în D. Are loc atunci următoarea teoremă.

Teorema 5.2. *Condiția necesară și suficientă pentru ca o funcție $f \in C^0(D)$ să fie primitivă areolară mărginită este ca ea să fie de forma*

$$f(z) = h(z) + T\varphi = h(z) - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - a}\, d\xi\, d\eta. \qquad (5.26)$$

Descompunerea (5.26) este unică și derivata areolară a lui f este $\varphi \in L^\infty(D)$ în afara unei funcții echivalente cu zero aditive :

$$\frac{Df}{D\omega} = \varphi \in \mathscr{L}^\infty(D). \qquad (5.26')$$

Dacă D are o frontieră $\Gamma(=\partial D)$, formată dintr-un număr finit de curbe simple, rectificabile și închise, fără puncte comune două cîte două, vom avea reprezentarea

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, d\xi d\eta. \qquad (5.27)$$

Prin $\mathcal{L}^\infty(D)$ am notat spațiul claselor de funcții echivalente din $L^\infty(D)$.

Formulele*) (5.25), (5.25′), (5.26), (5.26′), (5.27) constituie extinderea formulelor (5.16), (5.15) valabile în spațiul $C^1(D)$ și datorate lui D. Pompeiu, inițiatorul teoriei derivatei areolare pe care a dezvoltat-o sub forma restrînsă $\bar{\partial} f = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. D. Pompeiu a fost primul care a arătat că integrala

$$(T\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, d\xi d\eta \qquad (5.28)$$

reprezintă o funcție continuă în întreg planul complex $\mathbb{C}$, olomorfă în exteriorul lui D și nulă la infinit. În adîncirea acestui rezultat fundamental, s-a demonstrat că $(T\varphi)(z)$ este hölderiană, de exponent oricît de vecin de unitate, proprietate care joacă un rol important în cercetările ulterioare asupra lui $T\varphi$, în ipoteza că $\varphi \in L^\infty(\bar{D})$.

Să considerăm cazul particular al funcțiilor olomorfe (α) notînd spațiul corespunzător prin $\mathscr{H}_\alpha(D)$. În aceste condiții integrala (5.28) se reduce la o integrală Riemann generalizată (în sensul valorii principale Cauchy, ca în 5.15). Evident, în acest caz $\varphi \in L^\infty(D)$ și funcțiile olomorfe (α) sînt reprezentabile prin formulele (5.26), (5.27), teorema 5.2 fiind aplicabilă, iar derivata areolară este unică trebuind să fie continuă.

Importanța derivatei areolare apare în momentul în care se consideră sistemul Cauchy-Riemann neomogen și se încearcă să i se găsească soluții comparîndu-l cu sistemul omogen, care admite numai soluții indefinit derivabile, reprezentabile prin formula integrală

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}\, dz, \qquad (5.28')$$

care se găsește ca prim termen în membrul al doilea al formulei (5.27) și reprezintă o funcție olomorfă.

*) Teodorescu N., *La dérivée aréolaire et ses applications physiques* (Thèse). Paris, Gauthier Villars, 1931.

Întreaga teorie a funcțiilor analitice se dezvoltă pe baza acestei reprezentări integrale; după cum se știe și problemele la limită puse sistemului Cauchy-Riemann omogen au în această formulă integrală un instrument fundamental.

Cînd se încearcă însă integrarea sistemului Cauchy-Riemann neomogen, se constată că acesta, în general, nu admite soluții ordinare, deci cu derivate parțiale continue de ordinul întîi pentru orice alegere a membrilor ai doilea în acest sistem. Această idee a condus la considerarea derivatei areolare ca o derivată în sensul lui Lebesgue, pornind de la forma inițială, conformă dealtfel și cu calificarea de areolară, pe care D. Pompeiu o dăduse definiției derivatei areolare.

Importanța operatorului T și a integralei (5.28) a lui D. Pompeiu constă tocmai în faptul că oferă o reprezentare integrală a unei funcții care nu admite derivate parțiale și nu verifică sistemul Cauchy-Riemann neomogen decît în cazuri particulare, necesitînd impunerea de condiții suplimentare funcției φ, dar verifică ecuația funcțională (5.25), cel puțin în cazul destul de general al primitivelor areolare mărginite cu $\varphi \in L^\infty(D)$ sau al funcțiilor olomorfe (α), unde $\varphi \in C^0(D)$

Astfel derivata areolară și operatorul T constituie elementele de bază ale unui exemplu de *soluție generalizată*, anterior introducerii de către Sobolev a acestei noțiuni, iar ecuația funcțională (5.25), extinderea sub formă integrală a sistemului Cauchy-Riemann neomogen.

5.4.2. Derivata areolară slabă. Funcțiile din $\mathscr{D}_{\bar{z}}(D)$ și primitivele areolare

Definiția (5.17) ca și cea restrînsă prin operatorul diferențial $\bar{\partial} = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ impun derivatei areolare un caracter punctual, legînd-o totuși de derivatele parțiale, deși nu permite renunțarea la acestea. Or, ca soluții generalizate ale sistemului Cauchy-Riemann neomogene, primitivele areolare sînt definite într-un domeniu, cel puțin aproape peste tot. De aceea, extinderea cu ajutorul unui operator global a noțiunii de derivată areolară devenea necesară în lumina conceptului de soluție generalizată.

Noțiunea de derivată generalizată introdusă de Sobolev are calitatea de a răspunde la această necesitate. Acest punct de vedere a fost adoptat de I. N. Vekua care, pornind de la sistemul liniar (5.19),

care cuprinde și sistemul Cauchy-Riemann neomogen, și-a propus începînd din 1952 studiul unui sistem de forma

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}&=au+bv+k\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&=cu+dv+l\end{aligned}\right|. \tag{5.29}$$

Punînd $z=x+\mathrm{i}y,\quad w=u+\mathrm{i}v,$

$$A=\frac{1}{4}(a-d+\mathrm{i}c+\mathrm{i}b);\quad B=\frac{1}{4}(a+d+\mathrm{i}c-\mathrm{i}b),$$

$$C=\frac{1}{2}(k+\mathrm{i}l) \tag{5.29'}$$

sistemul capătă forma

$$\bar\partial w=\frac{\partial w}{\partial \bar z}=Aw+B\bar w+C. \tag{5.29''}$$

Presupunînd, pentru început, coeficienții continui, așa cum a făcut Vekua în primele sale lucrări, și căutînd soluții $w(z)$ continue în D, rezultă din (5.22'') necesitatea ca $\frac{\partial w}{\partial \bar z}$ să fie de asemenea continuă. Făcînd în (5.29) transformarea $u=z$, $v=-s$, deci $w=u+\mathrm{i}v\rightarrow\rightarrow \bar w=u+\mathrm{i}s=u-\mathrm{i}v$, sistemul (5.29'') devine

$$\frac{\partial \bar w}{\partial \bar z}=A\bar w+Bw+C,$$

deci și

$$\frac{\partial \bar w}{\partial \bar z}=\overline{\frac{\partial w}{\partial z}}\in C^0(D).$$

Aceasta impune ca, în cazul în care (5.29'') admite soluții continue, acestea să fie de clasă $C^1(D)$. Însă însăși sistemul mai simplu Cauchy-Riemann neomogen nu admite soluții ordinare pentru orice alegere a membrului. În consecință, studiul sistemului (5.28) impune de la început, ca și cel al sistemului Cauchy-Riemann neomogen, considerarea soluțiilor generalizate. Dar în aceste condiții derivata areolară

este cea care se impune ca instrument de investigație și deci forma (5.29'') este cea care poate indica, prin analogie cu sistemul Cauchy-Riemann neomogen, calea de urmat. Ideea de a se folosi în locul derivatelor parțiale derivate generalizate și în sensul lui Sobolev devine conducătoare.

În consecință, în locul derivatei areolare restrînse $\partial/\partial\bar z$ se impune să se introducă, pe calea formulelor de reciprocitate, de tip Gauss-Ostrogradski (sau Green) *derivate areolare generalizate* sau *slabe*. Aceasta ar permite considerarea sistemelor cu coeficienți discontinui.

Pentru a obține o astfel de formulă, fie $f,\ \psi\in C^1(D)$ și $\frac{\partial f}{\partial \bar z},\ \frac{\partial \psi}{\partial \bar z}$ derivatele lor areolare restrînse. Vom avea, conform cu proprietatea III din 5.2.1,

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}(f\psi)=f\frac{\partial\psi}{\partial \bar z}+\frac{\partial f}{\partial \bar z}\psi.$$

Aplicînd identitatea integrală (5.16) [sau (5.25)], vom avea pentru orice $G\subset D$ cu frontieră simplă Γ, rectificabilă și închisă (de exemplu, netedă sau netedă pe porțiuni)

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_\Gamma f(z)\cdot\psi(z)\,\mathrm{d}z=\iint_G\left(f\frac{\partial\psi}{\partial\bar z}+\psi\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

Presupunind în particular $\psi\in C_0^\infty(G)$, primul membru este nul și obținem identitatea integrală

$$\iint_G\left(f\frac{\partial\psi}{\partial\bar z}+\psi\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=0. \tag{5.30}$$

Dacă f este olomorfă în D, avem $\bar\partial f=0$ și (5.30) se reduce la

$$\iint_G f\frac{\partial\psi}{\partial\bar z}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=0. \tag{5.30'}$$

Această ultimă egalitate nu admite decît soluții olomorfe sau echivalente cu astfel de funcții, dacă este presupusă verificată pentru orice funcție-test ψ. Se poate demonstra că (5.30) rămîne valabilă și dacă f este o primitivă areolară mărginită. Notînd $\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}\omega}=\varphi,$

dacă $\varphi \in L^\infty(D)$, (5.30) se transcrie sub forma

$$\iint_G f \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta + \iint_G \varphi \cdot \psi \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = 0 \tag{5.31}$$

şi vom avea teorema următoare:

Teorema 5.3. *Dacă $f \in C^0(D)$ şi $\varphi \in L^\infty(D)$ satisfac ecuaţia (5.31) pentru orice funcţie-test ψ, atunci f este o primitivă areolară mărginită iar $\varphi = \dfrac{Df}{D\omega}$ aproape peste tot în G.*

⌜ Cum ψ este o funcţie-test, aceasta admite o derivată areolară $\bar{\partial}\psi$ în sens restrîns şi cum ψ este nulă pe ∂G, formula lui Pompeiu ca şi formula (5.27) este aplicabilă, reducîndu-se la

$$\psi(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{1}{\zeta - z} \bar{\partial}\psi(\zeta, \bar{\zeta})\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta,$$

funcţia ψ fiind cel puţin hölderiană în G. Schimbînd ordinea de integrare, conform unui calcul efectuat anterior, se obţine

$$\iint_G \varphi\psi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = -\iint_G (\mathrm{T}\varphi)(z, \bar{z})\, \bar{\partial}\psi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

iar cum (5.31) este verificată prin ipoteză, se deduce

$$\iint_G (f - \mathrm{T}\varphi)\, \bar{\partial}\psi\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0.$$

Întrucît diferenţa $f - \mathrm{T}\varphi$ este continuă în domeniul D, rezultă

$$f - \mathrm{T}\varphi = h(z), \qquad f(z, \bar{z}) = h(z) + \mathrm{T}\varphi,$$

h fiind evident olomorfă. Aplicînd teorema 5.2, se deduce că f este o primitivă areolară mărginită, avînd ca derivată areolară pe φ aproape peste tot în G. ⌟

Se poate face observaţia că teorema 5.3 pune în evidenţă posibilitatea de a defini derivata areolară cu ajutorul relaţiei integrale (5.31); este ceea ce a făcut Vekua, extinzind această relaţie la cazul

funcţiilor sumabile. Această derivată va fi notată prin simbolul $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sau $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$ şi vom scrie

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \bar{\partial} f = f_{\bar{z}}.$$

Mulţimea funcţiilor $f \in L(D)$, care admit derivate areolare generalizate, va fi notată prin $\mathscr{D}_{\bar{z}}(D)$.

Vekua nu numeşte această derivată areolară, ci *derivată generalizată în raport cu $\bar{z}$*, deşi termenul de derivată areolară era cunoscut încă din 1912.

Să observăm încă o dată, că derivata areolară generalizată (slabă) nu este determinată decît în afara unei funcţii aproape peste tot nulă (echivalentă cu zero) aditivă.

Teorema următoare pune în evidenţă proprietăţile de bază ale integralei lui Pompeiu în condiţii mai largi:

Teorema 5.4 (*I. N. Vekua*). *Dacă $\varphi \in L(\bar{D})$, funcţia $\mathrm{T}\varphi$, definită de operatorul lui Pompeiu*

$$(\mathrm{T}\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\varphi(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta,$$

are proprietăţile următoare:

a) *există aproape peste tot în D,*

b) $\mathrm{T}\varphi \in L^p(D_*)$

cu p un număr real arbitrar satisfăcînd dubla inegalitate $1 \leqslant p < 2$ iar D^* un domeniu mărginit oarecare din planul complex $\mathbb{C}$.

Dacă $\varphi \in L^q(\bar{D})$, cu $1 \leqslant q \leqslant 2$, integrala $\mathrm{T}\varphi$ este în general o funcţie discontinuă.

Dacă $p > 2$, integrala $\mathrm{T}\varphi$ este continuă şi chiar hölderiană.

În aceste condiţii teorema (5.3) a fost extinsă la cazul funcţiilor din $\mathscr{D}_{\bar{z}}(D)$, deci la funcţiile cu derivată areolară slabă, în modul următor [14]:

Teorema 5.5. *Orice funcţie $f \in \mathscr{D}_{\bar{z}}(D)$ este reprezentabilă printr-o formulă de forma*

$$f(z) = h(z) - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\varphi(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta, \tag{5.32}$$

unde h este olomorfă în D şi $\varphi = \bar{\partial} f \in L(\bar{D})$. Reciproc, *orice formulă de forma* (5.32) *reprezintă o funcţie* $f \in \mathscr{D}_{\bar{z}}(D)$ *şi*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \varphi. \qquad (5.32')$$

Se vede deci că funcţiile din $\mathscr{D}_{\bar{z}}(D)$ extind primitivele areolare mărginite, iar dacă $\varphi \in L^q(D)$ cu $q > 2$, funcţia $f(z)$ este continuă. Teorema următoare*) este de natură să pună în evidenţă legătura dintre derivata areolară slabă şi derivata areolară a primitivelor areolare prin operatorul T şi formula de reprezentare a lui Pompeiu extinsă.

Teorema 5.6 (*N. Teodorescu*). *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o primitivă areolară f să fie reprezentabilă prin formula integrală*

$$f(z) = h(z) - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z}\, d\xi d\eta \qquad (5.33)$$

cu h olomorfă în D şi $\varphi \in L(\bar{D})$ *este ca integrala* $T\varphi$ *să fie o funcţie continuă de z în D.*

O consecinţă importantă a acestei teoreme este că orice primitivă areolară reprezentabilă prin formula (5.33) este în acelaşi timp o funcţie din mulţimea $\mathscr{D}_{\bar{z}}(D)$, în baza teoremei 5.5. Derivata areolară a unei astfel de funcţii este în acelaşi timp şi derivata areolară slabă. În acest mod, ecuaţiile (5.25) şi (5.31) sînt echivalente pentru această clasă de primitive areolare.

5.4.3. Aplicaţii ale teoriei derivatei areolare

5.4.3.1. *Polinoamele areolare.* Pornind de la observaţia că funcţiile olomorfe se comportă ca nişte constante în raport cu derivata areolară, chiar şi cu cea slabă (sau cea restrînsă), se poate pune întrebarea care sînt funcţiile a căror derivată areolară este olomorfă. Aceasta revine la considerarea ecuaţiei simbolice

$$\frac{Dw}{D\omega} = f_1(z) \in H(D), \quad w \in C^0(D). \qquad (5.34)$$

*) T e o d o r e s c u N. *Dérivée aréolaire globale et dérivée généralisée.* Actes du Colloque sur les équations différentielles et fonctionnelles de Balatonvilàgos, 1961.

O soluţie particulară se obţine luînd $w_p(z, \bar{z}) = \bar{z} f_1(z)$, pentru care vom avea

$$\frac{Dw_p}{D\omega} = \frac{\partial w_p}{\partial \bar{z}} = f_1 \qquad (5.34')$$

şi scăzînd membru cu membru din (5.34),

$$\frac{D(w - w_p)}{D\omega} = 0,$$

de unde, fiindcă $w - w_p \in C^0(D)$, va trebui să avem $w - w_p = f_0(z) \in H(D)$ şi deci

$$w = f_0(z) + \bar{z} f_1(z) \text{ cu } f_0(z) \in H(D). \qquad (5.34'')$$

Să observăm că în cazul în care în ecuaţia (5.34) s-ar fi considerat derivata areolară slabă, soluţia ar fi fost de aceeaşi formă (5.34''), w fiind definit în afara de o funcţie aproape peste tot nulă.

Vom numi soluţia $w(z, \bar{z})$ dată de (5.29'') a ecuaţiei cu derivate areolare (5.29) *polinom areolar de ordinul întîi.*

Deoarece, ţinînd seama că f_0 şi f_1 sînt funcţii olomorfe, putem scrie

$$w(z, \bar{z}) = f_0(z) + \bar{z} f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{\bar{z}}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \qquad (5.35)$$

Adunînd şi scăzînd termenul $\bar{\zeta} f_1(\zeta)$ la numărătorul primei integrale, se obţine în final egalitatea

$$w(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{w(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{(\bar{z} - \bar{\zeta}) f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad (5.35')$$

care, deoarece $\partial_{\bar{z}} w = f$, se transcrie sub forma

$$w(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{w(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{\bar{z} - \bar{\zeta}}{\zeta - z} \cdot \frac{\partial w(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial \bar{\xi}} d\zeta \cdot \qquad (5.35'')$$

Această egalitate exprimă valorile lui w în interiorul domeniului D prin valorile lui w şi ale derivatei sale areolare calculate pe ∂D (evident, presupunînd w şi $\partial_{\bar{z}} w$ continue pe ∂D). Este uşor acum de definit polinomul areolar de ordin n (în domeniul $D \subset \mathbb{C}$) ca soluţie a ecuaţiei

$$\bar{\partial}^n w(z, \bar{z}) = f_n(z), \qquad (5.36)$$

unde f_n este o funcție olomorfă în D, sau ceea ce este același lucru, ca soluție în D a ecuației

$$\partial_{\bar z}^{n+1} w(z, \bar z) = 0. \qquad (5.36')$$

Rezultă imediat

$$w(z, \bar z) = f_0(z) + \bar z f_1(z) + \bar z^2 f_2(z) + \ldots + \bar z^n f_n(z), \qquad (5.37)$$

unde $f_0, \ldots, f_n$ sînt funcții olomorfe în D (în raport cu variabila complexă z). Dacă se notează

$$\partial_{\bar z} w(z, \bar z) = w_k(z, \bar z), \qquad k \leqslant n,$$

atunci

$$w_k(z, \bar z) = k! \cdot f_k(z) + \\ + (k+1)! \cdot \bar z f_{k+1}(z) + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)\,\bar z^{n-k} f_n,$$

$f_0, \ldots, f_n$ fiind definite prin (5.37); prin inducție, se obține ușor egalitatea

$$w(z, \bar z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f_0(\xi)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\bar z - \bar\zeta}{\zeta - z}\,\frac{w_1(\zeta, \bar\zeta)}{1!}\,d\zeta + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{(\bar z - \zeta)^n}{n!}\,\frac{w_n(\zeta, \bar\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad (5.37')$$

care generalizează (5.35') la $n > 1$.

Ca aplicație a teoriei polinoamelor areolare, să comparăm formula lui Pompeiu (5.15) cu egalitatea (5.35'); rezultă că dacă se face abstracție de o funcție olomorfă în D, are loc egalitatea

$$\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta, \zeta)}{\zeta - z}\,d\xi d\eta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\bar z - \bar\zeta}{\zeta - z} f(\zeta, \zeta)\,d\zeta,$$

dacă f este de asemenea olomorfă în D (și continuă în $\bar D$).

5.4.3.2. *Ecuații liniare cu derivate areolare.* Ecuația

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z} + a(z, \bar z)\, w = 0 \qquad (5.38)$$

liniară și omogenă poate fi integrată folosind proprietățile operatorului $\frac{\partial}{\partial \bar z}$ și Tf în ipoteza că acesta admite o derivată areolară ordinară sau chiar slabă, deci că

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}(Tf) = \frac{\partial}{\partial \bar z}\left[-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta, \bar\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi\, d\eta\right] = f(z, \bar z). \qquad (5.39)$$

Vom presupune dacă $a \in L(D)$ și vom avea amplificînd (5.38) prin e^{Ta}:

$$e^{Ta}\frac{\partial w}{\partial \bar z} + e^{Ta} a\, w = e^{Ta}\frac{\partial w}{\partial \bar z} + w\frac{\partial}{\partial \bar z}(e^{Ta}) = \frac{\partial}{\partial \bar z}(w e^{Ta}) = 0,$$

de unde

$$w\, e^{Ta} = h(z); \qquad w(z) = h(z)\, e^{-Ta}, \qquad (5.40)$$

unde $h(z)$ este o funcție olomorfă (sau echivalentă cu o funcție olomorfă). Putem spune că am obținut în acest mod forma generală a soluțiilor generalizate ale sistemului

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha(x, y)\, u - \beta(x, y) v = 0, \qquad (5.40')$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \beta(x, y)\, u + \alpha(x, y)\, v = 0,$$

echivalent cu (5.38), dacă notăm

$$a(z, \bar z) = 2[\alpha(x, y) + i\beta(x, y)], \qquad w = u + iv.$$

Evident că în cazul în care $a \in C^0(D)$, funcția Ta va fi olomorfă (α) și deci w va fi de asemenea olomorfă (α).

Soluția (5.40) a servit ulterior pentru stabilirea unor proprietăți importante ale soluțiilor ecuației omogene mai generale:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z} = aw + b\bar w, \qquad (5.41)$$

studiată de T. Carleman și apoi de I. N. Vekua.

Exemplu. Sistemul

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + 2\alpha u - 2\beta v = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + 2\beta u + 2\alpha v = 0,$$

cu α, β numere reale, se transcrie imediat sub forma (5.38) cu a o constantă. Vom putea lua $\mathrm{T}a = a\bar{z} + h_0(z)$, unde h_0 este olomorfă. Vom avea deci

$$w(z, \bar{z}) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y) = f(z)\, \mathrm{e}^{a\bar{z}},$$

incorporînd în $h(z)$ și factorul $\mathrm{e}^{h_0(z)}$. Punînd $h(z) = h_1(x, y) + \mathrm{i}\, h_2(x, y)$, vom avea

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w(z, \bar{z}) = \mathrm{e}^{-\alpha x - \beta y}[h_1(x, y) \cos(\alpha y - \beta x) - h_2(x, y) \sin(\alpha y - \beta x)],$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im} w(z, \bar{z}) = \mathrm{e}^{-\alpha x - \beta y}[h_2(x, y) \cos(\alpha y - \beta x) + h_1(x, y) \cos(\alpha\, y - \beta x)],$$

cu h_1 și h_2 două funcții armonice conjugate în domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ în care se caută soluția sistemului.

Dacă ecuația (5.38) se înlocuiește prin ecuația neomogenă

$$\partial_{\bar{z}} w(z, \bar{z}) + a(z, \bar{z})\, w = b(z, \bar{z}),$$

a și b fiind funcții continue în D, soluția se poate obține prin utilizarea metodei variației funcției h din soluția (5.40) [adică presupunînd $h = h(z, \bar{z})$]; se găsește ușor

$$w(z, \bar{z}) = h(z)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{T}a} + T(b\, \mathrm{e}^{\mathrm{T}a})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{T}a}.$$

Este evident că metodele de integrare a ecuațiilor diferențiale pot fi extinse cu ușurință și la ecuațiile în care apar derivate areolare de diverse ordine, fiecare ecuație de acest tip fiind de fapt un anumit sistem de ecuații cu derivate parțiale (a cărui transcriere sub formă complexă coincide cu ecuația amintită).

5.4.3.3. *Teorema lui Carleman și funcțiile olomorfe* (α). Sistemul (5.29) cu coeficienți continui a format obiectul unei cercetări ale lui T. Carleman care, în ipoteza că acesta admite soluții ordinare $u, v \in C^1(D)$, a stabilit o teoremă importantă.

Teorema 5.7 (*T. Carleman*). *Mulțimea zerourilor oricărei soluții ordinare a sistemului* (5.29) *omogen nu are puncte de acumulare în* D.

Ținînd seama că în general sistemul (5.29) nu admite soluții ordinare, se poate extinde teorema lui Carleman la soluții olomorfe (α); astfel scriind

$$\bar{\partial} w = w\left(A + B\,\frac{\bar{w}}{w}\right) = A_0 w, \quad A_0 = A + B\,\frac{\bar{w}}{w} \tag{5.42}$$

în locul ecuației $\bar{\partial} w = Aw + B\bar{w}$, ecuația este adusă la forma (5.38) astfel încît se poate scrie (pentru orice soluție pentru care $\mathrm{T}A_0$ există și admite o derivată areolară ordinară sau slabă) $\bar{\partial}(\mathrm{T}A_0) = A_0$. Dar în (5.42) A și B se presupun funcții continue iar raportul $\frac{\bar{w}}{w}$ va fi de asemenea o funcție continuă, exceptînd punctele în care se anulează w, în care acest raport nu este definit; avem $\left|\frac{\bar{w}}{w}\right| = 1$, și deci A_0 este mărginit în astfel de puncte iar TA_0 există. Or, raportîndu-ne la formula (5.40), vom putea scrie

$$w(z, \bar{z}) = h(z)\, \mathrm{e}^{-TA_0} \tag{5.43}$$

cu h funcție olomorfă în D; cum exponențiala nu se poate anula dacă $\mathrm{T}A_0$ este finit, toate zerourile lui w vor proveni din factorul h care fiind funcție olomorfă în D nu poate avea o mulțime de zerouri cu punct de acumulare în D. În acest mod, rezultatul lui Carleman se extinde la soluții olomorfe (α).

Se poate face în plus observația că aplicația $\mathrm{T}A_0$ este o funcție olomorfă (α) în D cu excepția zerourilor lui w, care sînt în număr finit (se presupune $\bar{D}$ un compact în $\mathbb{C}$).

Bibliografie

1. B e r k o v i t z, L. D. *Optimal Control Theory*. New York-Heidelberg-Berlin, Berlin, Springer-Verlag, 1974.
2. C o d d i n g t o n, E. A., L e v i n s o n, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York-Toronto-London, McGraw-Hill, 1955.
3. F r i e d r i c h s, K. O. *Spectral Theory of Operators in Hilbert Space*. New York-Heidelberg-Berlin, Springer-Verlag, 1973.
4. H a r t m a n, P. *Ordinary Differential Equations*. New York-Lonodn-Sydney, Wiley, 1964.
5. J o h n, F. *Partial Differential Equations*. New York-Heidelberg-Berlin, Springer-Verlag, 1974.
6. L e i s, R. *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. Mannheim, Bibliographisches Institut, 1967.
7. P o n t r e a g h i n, L. S. *Matematiceskaia teoria optimalnih profesov*. Moscova, Nauka, 1976.
8. P o n t r e a g h i n, L. S. *Obiknovennie diferenţialnie uravnenia*. Moscova, Fizmatghiz., 1961.
9. R o i t e n b e r g, I. *Théorie du Contrôle automatique*. Moscou, Mir, 1974.
10. T h é o d o r e s c u, N. *La Dérivée Aréolaire*. Bucarest, Annales Roumaines de Mathematiques, 1936.
11. T e o d o r e s c u, N., O l a r i u, V. *Ecuaţiile fizicii matematice*. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1970.
12. T e o d o r e s c u, N., O l a r i u, V. *Ecuaţiile fizicii matematice*. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1974.
13. T e o d o r e s c u, N., O l a r i u, V. *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, vol. I, Bucureşti, Editura tehnică, 1978.
14. V e k u a, I. N. *Obobşcionnie analiticeskie funkţii*. Moscova, Fizmatghiz, 1959.